Семинар по спецфункциям. Листок 3

1. Неопределенные интегралы от рациональных функций $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ берутся при помощи разложения рациональной функции в простейшие дроби. Покажите, что всякое разложение правильной дроби может быть получено последовательным применением тождества

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right).$$

Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{x(x-1)\cdots(x-n)}$.

2. Интегралы от рациональных тригонометрических выражений $\int \frac{\sin(x-a_1)\cdots\sin(x-a_n)}{\sin(x-b_1)\cdots\sin(x-b_m)}dx$ берутся с использованием разложения рационального тригонометрического выражения в сумму степеней функций

$$s(x-a) = \frac{1}{\sin(x-a)} \qquad \text{и} \qquad c(x-a) = \operatorname{ctg}(x-a),$$

производимого последовательным применением трех тождеств, одно из которых имеет вид

$$\frac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\left(\operatorname{ctg}(x-b) - \operatorname{ctg}(x-a)\right).$$

Выпишите оставшиеся два тождества и докажите приведенное утверждение. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-2a)\cdots\sin(x-na)}$.

3. (задача из курса дифференциальных уравнений, ВШЭ 2010)
Определим $\sin t$ и $\cos t$ как решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ дифференциального уравнения $\ddot{x}+x=0$, с начальными условиями $x_1(0)=0$, $\dot{x}_1(0)=1$, $x_2(0)=1$, $\dot{x}_2(0)=0$. Выведите, исходя из этого определения, тригонометрические тождества $(\sin t)' = \cos t$, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, и формулу сложения $\sin(t+s) = \sin t\cos s + \cos t \sin s$.

4. Согласно Эйзенштейну, $\operatorname{ctg} x$ определяется рядом

$$\pi \operatorname{ctg}_{Ei} \pi z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+n} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n}.$$

Докажите, что функция $\operatorname{ctg}_{Ei} \pi z$ периодична с периодом 1 и дифференциируема.

5. а) Найдите дифференциальное уравнение первого порядка, решением которого является функция $\pi \operatorname{ctg} \pi t$

б)* Проверьте, что ряд Эйзенштейна из задачи 4 является решением этого дифференциального уравнения.

в)* Докажите формулу дополнения Эйлера:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

6.** Известно доказательство эйлеровской формулы дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$ методами ТФКП. Для этого левая часть формулы дополнения переписывается через β-интеграл

$$B(z,1-z) = \int_0^1 (t/1-t)^{z-1} dt = \int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s} ds,$$

который вычисляется деформацией контура интегрирования. Попробуйте восстановить такое доказательство.