Листок 4

Задачи, отмеченные звездочкой, нужно сдать письменно. Крайний срок сдачи всех задач (письменных и устных) — 10.10.

Задача 1. Предположим, что $U \subseteq \mathbb{R}$ — связное открытое подмножество, и гладкая функция $f : U \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $f''(x) > 0$ для всех $x \in U$. Докажите, что множество всех касательных прямых к графику функции f полностью определяет функцию f. Более того, множество касательных прямых может быть параметризовано как $y = px - g(p)$, то есть в качестве параметра p можно взять тангенс угла наклона касательной, а $g(p) = \hat{f}(p)$ — преобразование Лежанждра функции f.

Задача 2. * Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, второй дифференциал которой $d^2_{\mathbf{x}} f$ положительно определен для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Проверьте, что тогда $d^2_{\mathbf{y}} \hat{f} > 0$ для всех $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n*}$.

Задача 3. Вычислите преобразование Лежандра функций (a) $f(x) = e^x$, (b) $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$.

Задача 4. * Докажите неравенство Юнга: $f(x) + \hat{f}(p) \geq px$. Выведите отсюда, что

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta} \geq px \quad \text{если} \quad \alpha, \beta > 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Задача 5. Рассмотрим гладкую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению мыльной пленки

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

Предположим, что функция u допускает преобразование Лежандра $\hat{u}$. Найдите уравнение с частными производными, которому удовлетворяет функция $\hat{u}$.

Задача 6. * Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, такое, что $\lambda U \subseteq U$ для всякого $\lambda > 0$. Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется *положительно-однородной степени* k, если

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n)$$

для всякой точки $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и всякого числа $\lambda > 0$. Докажите теорему *Эйлера об однородных функциях*: если f — дифференцируемая положительно-однородная функция степени k, то

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf.$$

Задача 7. Пусть $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Координата q_1 называется *циклической* для гамильтониана $H(q, p)$, если H не содержит явной зависимости от q_1, то есть является функцией от $q_2, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$. Докажите, что если q_1 — циклическая координата, то соответствующий импульс p_1 сохрянается (то есть не зависит от времени для любой истинной траектории).