

Домашние задачи

Задача 1. (срок сдачи 21.09)

Пусть C — пространство непрерывных функций вещественной переменной на $[-1, 1]$. Рассмотрим отображение $F : C \rightarrow \mathbb{R}$, переводящее f в $f(0)$. Будет ли оно непрерывным, если метрика на \mathbb{R} стандартна ($d(x, y) = |x - y|$), а метрика на C определена как

$$\text{а) } d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|; \quad \text{б) } d(f, g) = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx?$$

Ответ обоснуйте.

Задача 2. (срок сдачи 28.09)

При каких $0 \leq a < b \leq +\infty$

а) последовательность $\frac{x^n}{1+x^n}$; б) ряд $\sum \frac{\sin(x)\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$ сходится равномерно на $x \in [a, b]$? Ответ обоснуйте.

Задача 3. (срок сдачи 5.10) Пусть $p > 2$ — простое натуральное число. Положим для $n \in \mathbb{N}$

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ делится на } p \\ 1 & n - \text{ квадрат mod } p \\ -1 & n - \text{ не квадрат mod } p \end{cases}$$

Определим L -функцию Дирихле

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

а) Докажите, что этот ряд сходится при вещественном $s > 0$ и определяет в этом промежутке гладкую функцию.

б) Пусть p_1, p_2, \dots — все простые натуральные числа. Докажите, что для $s > 1$ выполнено

$$L(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k \frac{1}{1 - \chi(p_n)p_n^{-s}}.$$

Задача 4. (срок сдачи 12.10) Пусть $1 \leq p < q$ — вещественные числа.

а) Докажите, что l_p является линейным подпространством l_q .

б) Замкнуто ли l_p как подмножество l_q ?

в) Будет ли вложение l_p в l_q непрерывным отображением из l_p в l_q ?

Задача 5. (срок сдачи 19.10) Найдите значение L -функции Дирихле (см. Задачу 3) для $p = 3$

а) в точке $s = 1$;

б) в точке $s = 3$.