1 Вводная лекция

2 Релятивистская инвариантность

- Абсолютное время - фикция. Здравый смысл: время измеряется часами, у каждого свои.
- Конечная (максимальная) скорость распространения взаимодействия: $c = 299\ 792\ 458$ м/с - целое (рациональное!) число. Принцип относительности - эта величина одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Часто кладут $c = 1$, т.е. измеряют время в длинах, пройденных светом (вполне разумно).
- Инвариантной величиной является интервал между событиями $s^2 = c^2(t_1 - t_0)^2 - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2$, тогда группа преобразований - группа Лоренца: вращения в четырехмерном пространстве с "неправильным" знаком времени (Пуанкаре - добавлены сдвиги).

2.1 Интервал

Инвариантность интервала из постоянства скорости света:

- Светоподобный (изотропный?) - очевидно по определению;
- $ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2$, $d\tilde{s}^2 = c^2d\tilde{t}^2 - d\tilde{\mathbf{x}}^2$ тогда [1]

$$ds = C(\bullet)d\tilde{s} \tag{2.1}$$

- $C(\bullet) = 1$ из принципа относительности.
- Единственная возможность, если считать преобразования *линейными* по координатам.

Обозначения: $s^2 = (x_1 - x_0)^\mu (x_1 - x_0)_\mu$, $\{x^\mu\} = (ct, \mathbf{x})$, $x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$; $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1) = (+, -, -, -) \sim (-, +, +, +)$.

[1] Если, скажем, $c^2 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}}\right)^2$, то просто было бы всегда $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}$.

2.2 Преобразования Лоренца

Инвариантность $s^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$, (точнее $s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$) относительно $x^\mu \to \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$, очевидно что должно быть $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$. Группа Лоренца $O(1,3)$ ($SO(1,3)$ - собственная) - некоторый аналог (комплексификация?) обычной группы вращений $SO(3) \simeq SU(2)$,

$$X = \begin{pmatrix} ct+z & x-iy \\ x+iy & ct-z \end{pmatrix} = ct\mathbf{1} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}, \quad X^\dagger = X, \quad s^2 = \det(X)$$
$$X \to U^\dagger X U, \quad U \in SL(2,\mathbb{C}) \tag{2.2}$$

непонятно насколько интересный математически ... (интересно если $\eta \sim (-,-,+\ldots,+)$?) Так же, как и у группы вращений, есть двузначные представления.

Дискретные преобразования: $P : \{\mathbf{x} \to -\mathbf{x}, t \to t\}$, $T : \{\mathbf{x} \to \mathbf{x}, t \to -t\}$; связные компоненты $(\mathbf{1}, P, T, PT)$.

Качественные эффекты: двумерный мир $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 \underset{c=1}{=} dt^2 - dx^2$. Системы единиц и размерность ... вспомнить ... Иногда не будем писать c ничего не говоря ...

- Преобразования Лоренца из “вращений на мнимый угол” (частный случай произвольного линейного преобразования, сохраняющий интервал) - $SO(1,1)$ вместо $SO(2) \simeq U(1)$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

  где $\vartheta = \vartheta(V/c)$, где V - относительная скорость. При $x = 0$ получаем

$$t' = \cosh\vartheta\; t, \quad x' = \sinh\vartheta\; ct$$
$$\frac{x'}{ct'} = \frac{V}{c} = \tanh\vartheta \tag{2.4}$$

  $\vartheta \approx \frac{V}{c} \ll 1$ - нерелятивистский предел.

- Световой конус: прямые $t' = \text{const}$, $x' = \text{const}$ - координатные оси в движущейся системе координат. Для любой точки внутри конуса найдется система, в которой $t' = 0$, а вне конуса - $x' = 0$: времениподобные и пространственно-подобные интервалы. Геометрия - пространство Минковского, сигнатура метрики, выбор η с точностью до знака и т.п.

- Конформная группа - нулевой интервал инвариантен относительно большей группы преобразований:

$$\begin{gathered} ds^2 = d(t-x)d(t+x), \quad t \pm x \to f_{\pm}(t \pm x) \\ ds^2 \to f_+(t+x)' f_-(t-x)' ds^2 \end{gathered} \tag{2.5}$$

- Многомерие - неабелевость, конформная группа конечна ...

2.3 Физические следствия

- Относительность одновременности, сокращения длины и т.п. - в задачах (курс общей физики). Собственное время: $dx = 0$, $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2$ или $d\tau = dt\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} < dt$. При движении с постоянной скоростью

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - V^2/c^2} \tag{2.6}$$

- Закон преобразования скоростей

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad dt = \frac{dt' + V dx'}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz' \tag{2.7}$$

откуда

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V}, \quad v_{y,z} = v'_{y,z} \frac{\sqrt{1 - V^2}}{1 + v'_x V} \tag{2.8}$$

т.е. *все* компоненты преобразуются. При $V \ll 1$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\mathbf{v}')\mathbf{v}' + \ldots \tag{2.9}$$

где квадрат скорости света восстановлен из размерных соображений.

- Порядки величин ... $(V/c)^2 \sim 1/10$ - очень мало, тогда $V \sim c/3$ - невероятная скорость. В солнечной системе, у макроскопических тел - не наблюдается (задача). Малые частицы - π-мезоны и μ-мезоны (или мюоны) с массами $200 \div 300$ электронных масс. В экспериментах с π-мезонами наблюдалось $1 - V^2/c^2 \sim 10^{-2}$, для мюонов из космических лучей $1 - V^2/c^2 \sim 10^{-4}$.

2.4 Релятивистская частица

Не фикция - электроны, мюоны, пи-мезоны, адроны, ..., позитроны - летающие с большими скоростями.

Действие свободной частицы - релятивистский инвариант

$$S[x] = \kappa \int ds = \kappa \int \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \kappa c \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{x}}^2} \tag{2.10}$$

(забывая про знаки и т.п. - вообще говоря в каждом месте про это надо специально думать). В нерелятивистском пределе

$$\begin{aligned} S[x] \underset{c\to\infty}{\to} \kappa c \int dt \left(1 - \frac{1}{2c^2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \ldots\right) \stackrel{?}{=} \\ \stackrel{?}{=} \mathrm{const} + \int dt \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \ldots \end{aligned} \tag{2.11}$$

т.е. $\kappa = -mc$. А релятивистское свободное действие - не квадратично?

На самом деле:

$$S[x] = -mc \int \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = -mc \int d\tau \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \tag{2.12}$$

где теперь $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$, а τ - вовсе не обязательно t. (В книге ЛЛ пользуются $\tau = s$, $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ - 4-скорость: нет выделенного времени, разве что кроме собственного). Почему это разумно?

Проварьируем

$$\delta S[x] = -mc \int \frac{\delta dx^\mu dx_\mu}{\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} = -mc \frac{dx_\mu}{ds} \delta x^\mu \Big|_0^1 + mc \int \delta x^\mu d\frac{dx_\mu}{ds} \tag{2.13}$$

где теперь можно сказать, что концы определяются значением собственного времени: $\tau_0 = 0$, а τ_1 - какое-то.

Пусть теперь $\delta x^\mu|_0 = 0$, а $\delta x^\mu|_1 = \delta x^\mu$ - вариация "свободной" переменной. Тогда

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = mc\frac{dx_\mu}{ds} = mcu_\mu \tag{2.14}$$

и $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ действительно уместно называть 4-скоростью. Поскольку $u^\mu u_\mu = 1$, то $p^\mu p_\mu = m^2c^2$ - "уравнение массовой поверхности".

В трехмерных обозначениях

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right) \tag{2.15}$$

поэтому для релятивистской частицы $\mathcal{E}^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$ - уравнение массовой поверхности (гиперповерхности!; кем является массовая поверхность?), иногда говорят про "закон дисперсии", или

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4} \approx mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots \tag{2.16}$$

где первый член - эйнштейновская энергия покоя. Через скорости - задачи ...