Листок 5 Алгебра 2 1 Модуль

Напомним два определения прямого произведения групп: внешнее – прямым произведением $A \times B$ групп A и B называется их декартово произведение с покомпонентной операцией $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$ и внутреннее – группа G -прямое произведение если A' и B' - нормальные подгруппы, порождающие всю группу и пересекающиеся лишь по нейтральному элементу.

1. Докажите эквивалентность двух определений прямого произведения.

2. Сопряжение элементом $g : \sigma_g(h) = g^{-1}hg$ является автоморфизмом группы.

Автоморфизм группы называется внутренним если он является сопряжением элементом группы.

3. Докажите, что внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу.

Положим $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ –кватернионная группа.

4. Найдите группу автоморфизмов Q_8, какие из них внутренние?

Пусть группа G действует на группе H: $g \to \rho_g, \rho_g(h_1h_2 = \rho_g(h_1)\rho_g(h_2)$

Напомним два определения полупрямого произведения групп: внешнее – полупрямым произведением $G \ltimes H$ групп G и H называется их декартово произведение с операцией $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1\rho_{g_1}(h_2))$ и внутреннее – G -прямое произведение если G' и H' - подгруппы, порождающие всю группу и пересекающиеся лишь по нейтральному элементу и H'- нормальна.

5. Докажите эквивалентность двух определений полупрямого произведения.

6.Пусть g – элемент порядка n группы G. Действие g сопряжениями определяет полупрямое произведение $\mathbb{Z}/n \ltimes G$. Докажите что оно изоморфно прямому произведению $\mathbb{Z}/n \times G$.

7^***.** Докажите что $GL_2(\mathbb{F}_2)$ изоморфно S_3.

8^***.** Действие $GL_n(\mathbb{F})$ на векторное пространство F^n определяет их полупрямое произведение $GA_n(\mathbb{F})$. Докажите что $GA_2(\mathbb{F}_2)$ изоморфно A_4