

Алгебра. 1 курс. Листок 3.

Задачи, отмеченные знаком & , составляют необходимый минимум. Более сложные задачи отмечены знаком *.

◇ **3.1.** & Докажите, что если p — простое число, то кольцо \mathbb{Z}_p^n нельзя представить в виде прямого произведения каких-нибудь колец.

◇ **3.2.** & Сколько попарно неизоморфных колец здесь выписано:

\mathbb{Z}_{24} , $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

◇ **3.3.** Докажите, что любое кольцо вида $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ изоморфно некоторому кольцу вида $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_l}$, где числа m_1, m_2, \dots, m_l таковы, что каждое следующее является делителем предыдущего, т.е. $m_{i+1} \mid m_i$, $i = 1, 2, \dots, l-1$, и что такое представление для данного кольца единственно.

◇ **3.4.** а) Докажите, что кольцо всех непрерывных функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} нельзя представить в виде прямого произведения колец.

б) Представьте кольцо всех непрерывных функций из $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ в \mathbb{R} в виде прямого произведения колец.

◇ **3.5.** Докажите, что множество S всех последовательностей $\{a_n\}$ действительных чисел, имеющих предел, образует кольцо относительно операций сложения и умножения. Опишите идемпотентные последовательности. Докажите, что $S \cong \mathbb{R}^m \times S$ для любого m .

◇ **3.6.** а)& Докажите, что множество действительных чисел вида $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ является подкольцом в \mathbb{R} , а множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, является его полем частных.

б) & Является ли множество действительных чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, подкольцом в \mathbb{R} ? Как описать наименьшее подкольцо в \mathbb{R} , содержащее все такие числа?

в)& Опишите поле частных кольца из предыдущего пункта.

г) Опишите наименьшее подкольцо в \mathbb{R} , содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, и его поле частных.

*д) Найдите все подполя поля из предыдущего пункта.

◇ **3.7.** Рассмотрим евклидову плоскость и зафиксируем на ней единичный отрезок. Множество E будет состоять из длин всех отрезков, которые можно построить циркулем и линейкой, нуля и всех противоположных им чисел.

а) Докажите, что E является подполем в \mathbb{R} .

б) Докажите, что если $x \in E$, $x > 0$, то $\sqrt{x} \in E$.

*в) Докажите, что $E \neq \mathbb{R}$.

◇ **3.8.** & а) Дайте определение характеристики поля и докажите, что если $\text{char } \mathbb{K} = 0$, то \mathbb{K} содержит подполе, изоморфное \mathbb{Q} , а если $\text{char } \mathbb{K} = p$, то \mathbb{K} содержит подполе, изоморфное \mathbb{F}_p .

б) Докажите, что если a и b — элементы поля характеристики $p > 0$, то $(a + b)^p = a^p + b^p$.

◇ **3.9.** Докажите следующие тождества:

а)& $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

б)& $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

в)& $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2[\frac{n}{2}]} = 2^{n-1}$.

г)& $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

д)& $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$.

е) $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots + C_{n-[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]} = f_n$ — n -ое число Фибоначчи. ($[x]$ это целая часть числа x .)

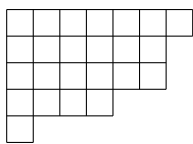
ж) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

◇ **3.10.** & а) Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$? (m, n натуральные числа.)

б) А сколько это уравнение имеет решений в натуральных числах?

в) Сколько существует одночленов степени n от m переменных?

Диаграммой Юнга называется фигурка, ограниченная северной и западной сторонами нарисованного по линиям клетчатой бумаги прямоугольника и какой-нибудь проведенной по линиям клетчатой бумаги кратчайшей ломаной, соединяющей юго-западную вершину этого прямоугольника с северо-восточной.



Это диаграмма Юнга, имеющая 5 строк и 7 столбцов.

◇ **3.11.** а) Сколько существует различных диаграмм Юнга, имеющих из не более чем n строк и не более чем m столбцов?

а) Сколько существует различных диаграмм Юнга, имеющих ровно n строк и ровно m столбцов?

◇ **3.12.** 1) Докажите формулу "тринома": $(a + b + c)^n = \sum_{k+l+m=n} \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} a^k b^l c^m$. (Сколько слагаемых стоит в правой части?)

2) Придумайте и докажите обобщение этой формулы на произвольное (конечное) число слагаемых.

◇ **3.13.** Докажите, что многочлен $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ делится нацело на многочлен $x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1$ тогда и только тогда, когда $n + 1$ делится нацело на $k + 1$.

◇ **3.14. &** Найдите остаток от деления многочлена $x^{11111} + x^{321} + 1$

а) на $x^2 - 1$; б) на $x^2 + 1$; в) на $x^2 - x + 1$.

В задачах 3.15 - 3.19 нужно вычислить ответ в кольце формальных степенных рядов, т.е. получить ответ в виде $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ и объяснить, как найти a_n .

◇ **3.15. &** а) $\frac{1}{10x+1}$; б) $\frac{1}{2+x}$; в) $\frac{1}{2x^2-3x+1}$.

◇ **3.16.** $\frac{1}{1-x-x^2}$. Как называется последовательность коэффициентов этого ряда?

◇ **3.17. &** а) $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots)$;

б) $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots)^2$; в) $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots)^n$;

г) $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots)^2$; д) $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots)^n$;

$$е) \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots}$$

◇ **3.18.** $2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots)$.

◇ **3.19. *** $[1 - 2x - (\frac{1}{2!}2^2x^2 + \frac{1 \cdot 3}{3!}2^3x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!}2^4x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{5!}2^5x^5 + \dots)]^2$.

◇ **3.20. *** Докажите, что ряд $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$ нельзя представить в виде отношения двух многочленов.

◇ **3.21.** Придумайте ряд из $\mathbb{F}_2[[x]]$, который нельзя представить в виде отношения двух многочленов из $\mathbb{F}_2[x]$.