Вводная лекция

1 Релятивистская инвариантность

2 Электромагнитное поле

3 Скалярное поле

3.1 Действие и вариации

Функции многих переменных

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1, \dots, x_N) \\ df &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \end{aligned} \tag{3.1}$$

Рассмотрим функции специального вида

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} A(x_k) + \sum_{k=1}^{N-1} B(x_{k+1} - x_k) \tag{3.2}$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= A'(x_k) + (B'(x_k - x_{k-1}) - B'(x_{k+1} - x_k)) \\ df &= \sum_{k=1}^{N} A'(x_k) dx_k + \sum_{k=2}^{N-1} (B'(x_k - x_{k-1}) - B'(x_{k+1} - x_k)) dx_k + \\ &\quad + B'(x_N - x_{N-1}) dx_N - B'(x_2 - x_1) dx_1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Можно на это посмотреть по-другому

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}; \mathbf{y})\big|_{y_i = x_{i+1} - x_i} &= a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{y})\big|_{y_i = x_{i+1} - x_i} \\ a(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} A(x_i), &\quad b(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N-1} B(y_i) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Тогда

$$df^A = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial x_k} dx_k = \sum_{k=1}^{N} A'(x_k) dx_k \tag{3.5}$$

но кроме того

$$df^B = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial b}{\partial y_k} dy_k = \sum_{k=1}^{N-1} B'(y_k) dy_k \tag{3.6}$$

Теперь можно вспомнить, что $\{y_k\}$ не независимы, т.е. $dy_k = dx_{k+1} - dx_k$, или

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} B'(y_k) dy_k = \sum_{k=1}^{N-1} B'(x_{k+1} - x_k)(dx_{k+1} - dx_k) = \\ = B'(x_N - x_{N-1}) dx_N - B'(x_2 - x_1) dx_1 - \\ - \sum_{k=1}^{N-1} (B'(x_{k+1} - x_k) - B'(x_k - x_{k-1})) dx_k \end{aligned} \tag{3.7}$$

Очевидно, что $df^A + df^B = df$, а $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ даёт уравнения Эйлера-Лагранжа.

- Задача: вывести гамильтоновы уравнения для цевочки Тоды $H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} p_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} e^{q_{k+1} - q_k}$;
- Действуем "размножением переменных"

$$\begin{gathered} x_k \longrightarrow q(t), \quad x_{k+1} - x_k \longrightarrow \dot{q}(t) \\ \sum_{k=1}^{N} \longrightarrow \int dt, \quad f(\mathbf{x}) \longrightarrow L(q, \dot{q}) \\ A(x) \longrightarrow -U(x), \quad B(y) \longrightarrow \frac{m}{2} y^2 \end{gathered} \tag{3.8}$$

Вариация действия

$$\begin{aligned} \delta \int dt L(q, \dot{q}) = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \\ = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_0^T + \int dt \delta q \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

- Замена бесконечного числа переменных на конечное часто бывает полезна и упрощает понимание ситуации. Но бывает и наоборот - в квантовой теории! (Конденсаты, выбор вакуума, $1/N$-разложение ...)

Механистическая модель поля:

$$S = \int dt L(q, \dot{q}) \to \int dt d\mathbf{x} \mathcal{L}(q(\mathbf{x}, t), \partial q(\mathbf{x}, t), \ldots) \tag{3.10}$$

подробнее

$$\begin{aligned} L = \tfrac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i^2 - \sum_{i<j} V(q_i - q_j) \to \sum_{\mathbf{x}} \left(\tfrac{1}{2} \dot{q}_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{\mathbf{x}'} V(q_{\mathbf{x}} - q_{\mathbf{x}'}) \right) \to \\ \to \sum_{\mathbf{x}} \mathcal{L} \left(q(\mathbf{x}, t), \partial_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}, t), \ldots; \partial_t q(\mathbf{x}, t) \right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Простейший случай - скалярное поле

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \tag{3.12}$$

В теории поля есть две точки зрения

- Координата $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ - аналог индекса i у обобщенных координат $q_i(t)$, а на время смотреть отдельно - удобно для определения энергии, связи с гамильтоновым формализмом, оператора эволюции, и т.п.;

- Все переменные $\{x_\mu\} \in \mathbb{R}^4$ - аналог индекса k в конечномерной задаче, удобно для релятивисткой инвариантности, евклидовой теории, и т.п.

3.2 Лагранжиан скалярного поля

Решим уравнения движения для скалярного поля

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \tfrac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \\ V(\phi) = \tfrac{1}{2} m^2 \phi^2 + \ldots \end{aligned} \tag{3.13}$$

Свободное скалярное поле - нет самодействия или взаимодействия с другими полями.

Уравнения движения - *линейны*. Именно

$$\begin{aligned}\delta \int d^4x\mathcal{L} &= \int d^4x \left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\delta\phi - m^2\phi\delta\phi\right) = \\ &= \int d^4x\partial_\mu\left(\delta\phi\partial^\mu\phi\right) - \int d^4x\delta\phi(\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi)\end{aligned} \tag{3.14}$$

получаем уравнение Клейна-Гордона

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0, \qquad \Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu \tag{3.15}$$

Как решать - преобразованием Фурье: $\phi(x) = \int d^4p e^{ipx}\tilde{\phi}(p)$, тогда просто

$$(p^2 - m^2)\tilde{\phi}(p) = 0, \quad \tilde{\phi}(p) = \delta(p^2 - m^2)\hat{\phi}(p) \tag{3.16}$$

т.е. говорят, что поле $\tilde{\phi}(p)$ локализовано на массовой поверхности

$$\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4 \tag{3.17}$$

Два решения: $\mathcal{E}_\pm = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4} \equiv \pm\mathcal{E}(\mathbf{p})$, поэтому

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int d^4p e^{ipx}\tilde{\phi}(p) = \int d^4p e^{ipx}\delta(p^2 - m^2)\hat{\phi}(p) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\mathcal{E}(\mathbf{p})}\left(e^{i\mathcal{E}(\mathbf{p})t - i\mathbf{p}\mathbf{x}}\hat{\phi}_+(\mathbf{p}) + e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t - i\mathbf{p}\mathbf{x}}\hat{\phi}_-(\mathbf{p})\right)\end{aligned} \tag{3.18}$$

где просто обозначили $\hat{\phi}_\pm(\mathbf{p}) = \hat{\phi}(p)\Big|_{p_0=\pm\mathcal{E}(\mathbf{p})}$: две произвольные функции (амплитуды) от 3-мерного импульса.

- Ситуация даже проще, чем с электромагнитным полем - нет калибровочной инвариантности, поляризаций, и т.п.
- Опять - линейная суперпозиция волн $\hat{\phi}_\pm(\mathbf{p})e^{\pm i\mathcal{E}(\mathbf{p})t - i\mathbf{p}\mathbf{x}}$
- Другое условие дисперсии: $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$, т.е. волна похожа на частицу с массой покоя m.