Вводная лекция

1 Релятивистская инвариантность

2 Электромагнитное поле

3 Скалярное поле, лагранжианы

4 Электромагнитное поле. Волны

- Принцип наименьшего действия - нет другого;
- действие - квадратично по производным, свободное действие - квадратично по полям;
- действие релятивистски-инвариантно и (электромагнитное поле через 4-потенциал) калибровочно-инвариантно.

4.1 Действие электромагнитного поля

Для электромагнитного поля за обобщенные координаты естественно взять $\{A_\mu(x)\}$, калибровочный инвариант $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]}$, релятивистский - функции от *инвариантов*

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &\sim \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 = \mathrm{inv} \\ \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma} &\sim \mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = \mathrm{inv} \end{aligned} \tag{4.1}$$

поэтому можно пытаться написать $S = \int dtd^3x\mathcal{L} = \int d^4x\mathcal{L}$,

$$\begin{gathered} \mathcal{L} = \alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \beta\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma} \\ \alpha = -\frac{1}{16\pi c}, \quad \beta \sim i\vartheta \end{gathered} \tag{4.2}$$

Почему пока β не важно, и этот кусок можно забыть? Простой аргумент - только одна производная по времени, а кроме того

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma} = 2\partial_\mu\left(\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}A_\nu F_{\lambda\sigma}\right) \tag{4.3}$$

и это “поверхностный” вклад в действие - не влияет на уравнения движения (но, в принципе, такой член может быть важен при изучении топологически нетривиальных конфигураций полей).

Что касается первой структуры (выбор $\alpha = -\frac{1}{16\pi c}$ - вопрос удобства)

$$\begin{aligned}\delta\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = 2F^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu\right) = 4F^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu = \\ = 4\partial_\mu\left(F^{\mu\nu}\delta A_\nu\right) - 4\delta A_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{4.4}$$

т.е.

$$\begin{aligned}\delta\left(-\frac{1}{16\pi c}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{4\pi c}\oint F^{\mu\nu}\delta A_\nu d^3V_\mu + \\ +\frac{1}{4\pi c}\int d^4x\delta A_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{4.5}$$

или уравнения *свободного* электромагнитного поля

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{4.6}$$

Что делать, если есть заряженная материя мы знаем - добавить $\frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu$ для каждой частицы, или *ток* $j_\mu(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\int d^4x A_\mu(x)j^\mu(x) = \sum_I \frac{e_I}{c}\int A_\mu(x_I)dx_I^\mu \\ j^\mu(x) = \sum_I e_I\int dx_I^\mu\delta^{(4)}(x - x_I) = \\ = \sum_I e_I\int dt_I\delta(t - t_I)\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\frac{dx_I^\mu}{dt} = (c\rho, \mathbf{j})\end{aligned} \tag{4.7}$$

где компоненты 4-тока: плотность заряда и плотность электрического тока

$$\begin{aligned}\rho = \sum_I e_I\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I), \quad Q = \int d^3x\rho = \sum_I e_I \\ \mathbf{j} = \sum_I e_I\mathbf{v}_I\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\end{aligned} \tag{4.8}$$

Упражнение: доказать $\partial_\mu j^\mu = 0$ или $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0$. Если это уравнение не выполняется, то плохо - взаимодействие калибровочно не инвариантно

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon A_\mu = \partial_\mu\varepsilon, \quad \delta_\varepsilon j^\mu = 0 \\ \delta\int d^4x A_\mu j^\mu = \int d^4x\partial_\mu\varepsilon j^\mu = -\int d^4x\varepsilon\partial_\mu j^\mu\end{aligned} \tag{4.9}$$

В интегральной форме это означает

$$\begin{gathered}\int d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int d^3x \ \mathrm{div}\mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\rho + \int d^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{j} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \int d^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{j} = \frac{\partial Q}{\partial t} + I = 0\end{gathered} \tag{4.10}$$

что измерение полного заряда равно полному току через окружающую заряд поверхность.

Теперь, поскольку $\delta\int d^4xA_\mu j^\mu = \int d^4x\delta A_\mu j^\mu$, то возникающие уравнения Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu \tag{4.11}$$

(опять же с необходимостью требующее $\partial_\nu j^\nu = 0$). Более подробно

$$\begin{gathered}\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\end{gathered} \tag{4.12}$$

Первое из них - закон Гаусса

$$Q = \int \rho d^3x = \frac{1}{4\pi}\oint \mathbf{E}\cdot d^2\mathbf{S} \tag{4.13}$$

т.е. поток поля через замкнутую поверхность равен заряду внутри. Второе - в "стационарном" случае (движение или изменение по времени есть $\mathbf{j} = \sum_I e_I\mathbf{v}_I\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)$, но токи не меняются) дает уравнение "магнитостатики" $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$.

Напомним также что дополнительные уравнения Максвелла, очевидные из определений. Так как $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, то

$$\begin{gathered}\partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0, \quad \text{or} \\ \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}\partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0\end{gathered} \tag{4.14}$$

где $\epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}$ - полностью антисимметричный тензор. Из последней записи ясно, что уравнений - всего 4

$$\begin{gathered}\epsilon_{ijk}\partial_i F_{jk} = 0 \\ \epsilon_{ijk}(\partial_j F_{k0} + \partial_0 F_{jk}) = 0, \quad i = 1,2,3\end{gathered} \tag{4.15}$$

В других обозначениях

$$
\begin{aligned}
\partial_i H_i = 0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0 \\
\epsilon_{ijk}\partial_j E_k + \partial_0 H_i = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

легко узнаем пару уравнений Максвелла: условие отвутствия магнитных зарядов и закон электромагнитной индукции Фарадея. Например, по теореме Гаусса

$$
\int \mathrm{div}\mathbf{H}\; d^3x = \oint \mathbf{H}\cdot d^2\mathbf{S} = 0 \tag{4.17}
$$

т.е. магнитный поток равен нулю через любую замкнутую поверхность. Магнитные заряды?

Аналогично

$$
\int \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot d^2\mathbf{S} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}\cdot d^2\mathbf{S} \tag{4.18}
$$

Важно: мы получили уравнения на $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, которые являются тождествами, после подстановки в них выражений через $\{A_\mu\} = (\varphi, -\mathbf{A})$. Решением этих уравнений Максвелла является выражение полей через 4-потенциал $\{A_\mu\}$, с точностью до калибровочной инвариантности

$$
\begin{aligned}
A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x), \qquad F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} \\
\int A_\mu dx^\mu \to \int A_\mu dx^\mu + \varepsilon|_0^1
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

4.2 Волновое решение

Попробуем для начала решить $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ (без источников), или

$$
\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0 \tag{4.20}
$$

- Для начала - число независимых компонент: 4-потенциал, калибровочная инвариантность и уравнение движения, т.е. $4 - 1 - 1 = 2$.

- Зафиксировать калибровочную инвариантность - выбрать калибровку: дополнительное условие

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \partial_i A_i = 0 \tag{4.21}$$

т.н. кулоновская калибровка

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \tag{4.22}$$

- релятивистски-инвариантная калибровка.

$A_0 = 0$ - калибровка? При $\nu = 0$ ($\Delta = \sum_i \partial_i \partial_i$)

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu A_0 - \partial_0 \partial^\mu A_\mu = (\partial_0^2 - \Delta) A_0 - \partial_0 (\partial_0 A_0 - \mathrm{div}\mathbf{A}) = \\ = \partial_0 \mathrm{div}\mathbf{A} - \Delta A_0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

т.е. в кулоновской калибровке $\Delta A_0 = 0$, у которого есть хорошее решение $A_0 = 0$. Например, оно хорошее в следующем смысле: при ненулевой плотности зарядов

$$\begin{aligned} \Delta A_0 = -4\pi\rho = -4\pi \sum_I e_I \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \\ A_0 = \Phi(\mathbf{x}) = \sum_I \frac{e_I}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|} \end{aligned} \tag{4.24}$$

т.е. - закон Кулона, который при занулении всех зарядов дает $A_0 = 0$. **Упражнение**: вывести (4.24) честно.

Сделаем теперь преобразование Фурье

$$A_\mu(x) = \int d^4k \exp(ik_\mu x^\mu) a_\mu(k) \tag{4.25}$$

тогда волновое уравнение (4.20) перейдет в

$$k_\mu k^\mu a_\nu(k) - k_\nu k^\mu a_\mu(k) = 0 \tag{4.26}$$

на фурье-образ - (в двух членах по-разному сворачиваются индексы!).

Почему? Ряд Фурье $A(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}a_n$ и интеграл Фурье $A(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}a(k)\frac{dk}{2\pi}$ представляют собой разложение по *полному* и *ортогональному* базису функций на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (т.е. просто $A(x+2\pi) = A(x)$) и на прямой $\mathbb{R}$ соответственно

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} dx\ e^{inx}e^{imx} = 2\pi\delta_{n+m,0} \\ &\int_{\mathbb{R}} dx\ e^{ipx}e^{ikx} = 2\pi\delta(p+k) \end{aligned} \tag{4.27}$$

Упражнение: доказать $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk e^{ikx}$, где $\int_{\mathbb{R}} dx f(x)\delta(x-a) = f(a)$.

Разложим вектор $a_\mu = k_\mu c(k) + a_\mu^\perp(k)$, $k^\mu a_\mu^\perp = 0$ (ортогональное разложение). Забудем (пока?) про продольную компоненту $a_\mu^\parallel \sim k_\mu c(k)$, котора выпадает из уравнения (4.20). Тогда

$$k_\mu k^\mu a_\mu^\perp(k) = 0 \tag{4.28}$$

и

$$a_\mu^\perp(k) = \delta(k^2)\tilde{a}_\mu(k), \quad k^\mu\tilde{a}_\mu = 0 \tag{4.29}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\tilde{a}_\mu(k) = \sum_{J=1,2} e_\mu^{(J)} b_J(k), \quad k^\mu e_\mu^{(J)} = 0,\ J = 1,2 \tag{4.30}$$

Ортогональное разложение ортогонального изотропному вектора

$$(k, -k, 0, 0) \oplus (0,0,1,0) \oplus (0,0,0,1) \tag{4.31}$$

т.е.

$$e_\mu^{(J)} = (0, -\mathbf{e}^{(J)}(\mathbf{k})), \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{e}^{(J)}(\mathbf{k}) = 0, \quad J = 1,2 \tag{4.32}$$

два “вектора поляризации фотона”, перпендикулярных его импульсу.

Следовательно $(\delta(f(x)) = \sum_{f(x_*)=0} \frac{1}{|f'(x_*)|}\delta(x - x_*))$

$$\begin{aligned} A_\mu(x) = \int d^4k \exp(ik_\mu x^\mu) a_\mu(k) &= \int d^4k \exp(ik_\mu x^\mu)\delta(k^2)\tilde{a}_\mu(k) = \\ &= \int d^4k \exp(ik_\mu x^\mu)\delta(k^2) \sum_{J=1,2} e_\mu^{(J)} b_J(k) = \\ = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} \sum_{J=1,2} e_\mu^{(J)}(\mathbf{k}) &\left(e^{(i|\mathbf{k}|t - i\mathbf{k}\mathbf{x})} b_J^+(\mathbf{k}) + e^{(-i|\mathbf{k}|t - i\mathbf{k}\mathbf{x})} b_J^-(\mathbf{k})\right) \end{aligned} \tag{4.33}$$

есть суперпозиция плоских волн ($b^{\pm}_J(\mathbf{k}) \equiv b_J(k)|_{k_0=\pm|\mathbf{k}|}$), (с точностью до разговоров про калибровки и т.п.)

$$\begin{gathered} A^{(\mathbf{k},J,\pm)}_\mu(x) = (0, \mathbf{A}^{(\mathbf{k},J,\pm)}(x)) \\ \mathbf{A}^{(\mathbf{k},J,\pm)}(x) = \mathbf{e}^{(J)}(\mathbf{k}) \exp(\pm i\omega(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\mathbf{x}), \quad \omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \end{gathered} \tag{4.34}$$

(то же соотношение $\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 c^2$ для безмассовой частицы, но теперь уже точно "закон дисперсии") для которых электрическое поле

$$\mathbf{E}^{(\mathbf{k},J,\pm)}(x) \sim i\omega(\mathbf{k})\mathbf{e}^{(J)}(\mathbf{k}) \exp(\pm i\omega(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\mathbf{x}) \tag{4.35}$$

и магнитное поле

$$\mathbf{H}^{(\mathbf{k},J,\pm)}(x) \sim \mathbf{k} \times \mathbf{e}^{(J)}(\mathbf{k}) \exp(\pm i\omega(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\mathbf{x}) \tag{4.36}$$

очевидно перпендикулярны.