Вводная лекция

1 Релятивистская инвариантность

2 Электромагнитное поле

2.1 Релятивистская частица

Действие свободной частицы - релятивистский инвариант

$$S[x] = -mc\int ds = mc\int\sqrt{dx^\mu dx_\mu} = -mc^2\int dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{x}}^2} \tag{2.1}$$

(забывая про знаки и т.п. - вообще говоря в каждом месте про это надо специально думать). В нерелятивистском пределе

$$\begin{gathered} S[x] \underset{c\to\infty}{\to} -mc^2\int dt\left(1-\frac{1}{2c^2}\dot{\mathbf{x}}^2+\ldots\right) \stackrel{?}{=} \\ \stackrel{?}{=} \mathrm{const} + \int dt\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2+\ldots \end{gathered} \tag{2.2}$$

Проварьируем

$$\delta S[x] = -mc\int\frac{\delta dx^\mu dx_\mu}{\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} = -mc\frac{dx_\mu}{ds}\delta x^\mu\Big|_0^1 + mc\int\delta x^\mu d\frac{dx_\mu}{ds} \tag{2.3}$$

где теперь можно сказать, что концы определяются значением собственного времени: $\tau_0 = 0$, а τ_1 - какое-то.

Пусть теперь $\delta x^\mu|_0 = 0$, а $\delta x^\mu|_1 = \delta x^\mu$ - вариация “свободной” переменной. Тогда

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = mc\frac{dx_\mu}{ds} = mcu_\mu \tag{2.4}$$

и $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ действительно уместно называть 4-скоростью. Поскольку $u^\mu u_\mu = 1$, то $p^\mu p_\mu = m^2c^2$ - “уравнение массовой поверхности”.

В трехмерных обозначениях

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\mathbf{p}\right) \tag{2.5}$$

поэтому для релятивистской частицы $\mathcal{E}^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$ - уравнение массовой поверхности (гиперповерхности!; кем является массовая поверхность?), иногда говорят про "закон дисперсии", или

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4} \approx mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots \tag{2.6}$$

где первый член - эйнштейновская энергия покоя. Через скорости - задачи ...

2.2 Кинематика → динамика

Уравнения движения свободной частицы $d\frac{dx^\mu}{ds} = 0$ или

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{dp^\mu}{ds} = 0 \tag{2.7}$$

т.е. $p^\mu = \text{const}$, $x^\mu(s)$ - прямая (в каких координатах не пиши).

Взаимодействие

$$\begin{aligned} S[x|A] = S[x] - \frac{e}{c}\int A_\mu(x)dx^\mu = S[x] - \frac{e}{c}\int A_\mu(x)\dot{x}^\mu d\tau = \\ \underset{\tau=t}{=} S[x] + \int dt\left(\frac{e}{c}\mathbf{A}(x)\dot{\mathbf{x}} - e\varphi(x)\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

естественный линейный по производным член. Электромагнитное взаимодействие с векторным и скалярным потенциалами. Сила взаимодействия $f_\mu(x,\dot{x})$

$$\begin{aligned} \delta \int A_\mu(x)\dot{x}^\mu d\tau = \int d\tau \left(\partial_\nu A_\mu \delta x^\nu \dot{x}^\mu + A_\mu \delta\dot{x}^\mu\right) \simeq \\ \simeq \int d\tau \left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right)\delta x^\nu \dot{x}^\mu \end{aligned} \tag{2.9}$$

т.е.

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} = f_\mu \tag{2.10}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

при стандартных выражениях $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Проще

$$
\begin{gathered}
F_{ij} = -\epsilon_{ijk} H_k, \quad H_i = -\tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} F_{jk} = -\epsilon_{ijk}\partial_j A_k \\
E_i = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \\
\{A_\mu\} = (\varphi, -\mathbf{A})
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

где ϵ_{ijk} - полностью антисимметричный тензор, $\epsilon_{123} = 1$.

$$
\begin{gathered}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{iln} = \delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl} \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}
\end{gathered}
\tag{2.13}
$$

В трехмерии 2-форма двойственна 1-форме, в 4-мерии 2-форме будет отвечать дуальная 2-форма.

Законы электромагнетизма релятивистски-инвариантны! Мы вывели это из общих принципов “ничего не делая” ... Преобразования потенциалов

$$
A_x = \frac{A'_x + V\varphi'}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad \varphi = \frac{\varphi' + VA'_x}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z \tag{2.14}
$$

“двойственны” преобразованиям координат. Если в некоторой системе отсчета $\mathbf{A} = 0$ и нет магнетизма ($\mathbf{H} = 0$, например, покоящиеся заряды - электростатика), то уже в движущейся системе со скоростью V эти заряды будут двигаться, т.е. пойдет ток, создающий магнитные поля.

2.3 Сила Лоренца

Уравнения движения $\dot{p}_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$ инвариантны относительно выбора параметра на траектории, пусть $\tau = ct$, тогда

$$
\frac{dp_\mu}{dt} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dt} \tag{2.15}
$$

что означает для $\{p_\mu\} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\mathbf{p}\right)$

$$
\frac{dp_i}{dt} = -\frac{e}{c} F_{ij} \frac{dx^j}{dt} + eF_{0i} = eE_i + \frac{e}{c}\epsilon_{ijk} H^j \frac{dx^k}{dt} \tag{2.16}
$$

или

$$
\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \tag{2.17}
$$

буквально совпадающее с уравнением в нерелятивистском пределе. Для нулевой компоненты получаем тоже хорошо знакомое уравнение

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = eF_{0i}\frac{dx^i}{dt} = eE_i v^i = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} \tag{2.18}$$

т.е. магнитное поле не дает вклада в изменение энергии частицы: магнитное поле не совершает работы. Чуть менее тривиальный факт: в постоянном магнитном поле частица, с начальной скоростью перпендикулярной полю, начинает вращаться по окружности.

2.4 Удлиненный импульс

Пусть $p_\mu = \delta S[x]/\delta\dot{x}^\mu$, определим

$$P_\mu = \frac{\delta S[x|A]}{\delta\dot{x}^\mu} = \frac{\delta}{\delta\dot{x}^\mu}\left(S[x] - \frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu\right) = p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu(x) \tag{2.19}$$

т.е. электромагнитный потенциал удлиняет импульс. Так называемое - минимальное взаимодействие.

Гамильтонов формализм - проблема выбора времени.

2.5 Уравнения Максвелла. Лагранжиан. Калибровочные преобразования

Некоторые уравнения Максвелла очевидны из определений. Так как $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, то

$$\begin{gathered}\partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0, \quad \text{or}\\ \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}\partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0\end{gathered} \tag{2.20}$$

где $\epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}$ - полностью антисимметричный тензор. Из последней записи ясно, что уравнений - всего 4

$$\begin{gathered}\epsilon_{ijk}\partial_i F_{jk} = 0\\ \epsilon_{ijk}(\partial_j F_{k0} + \partial_0 F_{jk}) = 0, \quad i = 1,2,3\end{gathered} \tag{2.21}$$

В других обозначениях

$$\begin{gathered}\partial_i H_i = 0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0\\ \epsilon_{ijk}\partial_j E_k + \partial_0 H_i = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0\end{gathered} \tag{2.22}$$

легко узнаем пару уравнений Максвелла: условие отвутствия магнитных зарядов и закон электромагнитной индукции Фарадея. Например, по теореме Гаусса

$$\int \mathrm{div}\mathbf{H}\; d^3x = \oint \mathbf{H}\cdot d^2\mathbf{S} = 0 \tag{2.23}$$

т.е. магнитный поток равен нулю через любую замкнутую поверхность. Магнитные заряды?

Аналогично

$$\int \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot d^2\mathbf{S} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}\cdot d^2\mathbf{S} \tag{2.24}$$

закон электромагнитной индукции.

Важно: мы получили уравнения на $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, которые являются тождествами, после подстановки в них выражений через $\{A_\mu\} = (\varphi, -\mathbf{A})$. Решением этих уравнений Максвелла является выражение полей через 4-потенциал $\{A_\mu\}$, с точностью до калибровочной инвариантности

$$\begin{gathered} A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x) \\ F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} \\ \int A_\mu dx^\mu \to \int A_\mu dx^\mu + \varepsilon|_0^1 \end{gathered} \tag{2.25}$$

Как написать оставшиеся уравнения - нетривиальные и динамические?