Дифференциальная геометрия

1 Ковариантное дифференцирование на поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$

1. Действующие лица.

Поверхность S в мы будем представлять как можесто нулей гладкой функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \;\mid f(x_1, x_2, x_3) = 0\right\}.$$

Наша поверхность будет предполагаться регулярной, т. е. градиент $grad\ f\ \neq\ 0$ в каждой ее точке. Такая поверхность допускает гладкое ориентирующее поле единичных нормальных векторов $N = \frac{grad\ f}{\|gradf\|}$. Вектор N в каждой точке $x \in S$ перпендикулярен касательному пространству T_x к поверхности в точке x (почему?). Касательные векторы к поверхности можно воспринимать как векторы объемлющего пространства . Поэтому можно говорить о длине вектора и углах между векторами в каждом касательном пространстве T_x.

- Под параметризованной кривой в $\mathbb{E}^3$ мы будем понимать гладкое отображение $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$, где I некоторый открытый интервал в $\mathbb{R}$.

2. Ковариантная производная

Предположим, что на кривой γ на поверхности S задано векторное поле $V(t) \in T_{\gamma(t)}$.

Зададимся несколько странным вопросом: с какой скоростью с точки зрения жителя поверхности S меняется поле $V(t)$?

Покоординатное дифференцирование $\dot{V}(t) = (\dot{V_1}(t), \dot{V_2}(t), \dot{V_3}(t))$ по t векторного поля V не может служить ответом, так как такой вектор, вообще говоря, не касается поверхности. А векторы в , отличные от касательных к поверхности, не имеют смысла для ученых жителей поверхности. Однако, мы можем при каждом $t \in I$ ортогонально спроектировать вектор $\dot{V}(t)$ на касательное пространство $T_{\gamma(t)}$. Этот процесс дифференцирования с последующим проектированием на касательное пространство называется ковариантным дифференцированием, обозначается значком ∇ и приводит к полю

$(\nabla V)(t)$, снова касательному к поверхности вдоль кривой γ. Итак, ковариантная производная векторного поля V вдоль кривой γ есть векторное поле ∇V, касательное к S вдоль γ и определенное равенством

$$\nabla V = \dot{V} - (\dot{V}, N)N$$

(выражение, стоящее в левой части и есть ортогональная проекция).

Пример 1 *Если $V = \dot{\gamma(t)}$ – поле скоростей точки вдоль кривой γ на S, то ∇V – ее ускорение вдоль кривой γ, каким оно видится на S.*

Свойства ковариантной производной

1) Линейность: для любых двух вещественных чисел и полей V и W вдоль γ:

$$\nabla(aV + bW) = a\nabla V + b\nabla W$$

2) Дифференцирование произведения (правило Лейбница):

для любой вещественнозначной гладкой функции f и поля V

$$\nabla(fV) = f\nabla V + \frac{df}{dt}V$$

3) Правило дифференцирования скалярного произведения

$$\frac{d}{dt}(V, W) = (\nabla V, W) + (V, \nabla W)$$

3. Параллельный перенос вдоль кривой как синоним ковариантного дифференцирования

Вообще говоря, нет способа определить понятие «одно и то же направление» в разных точках поверхности. Однако ковариантное дифференцирование позволяет по выбранному пути между точками $m_1 = \gamma(a)$ и $m_2 = \gamma(b)$ определить естественную изометрию касательных пространств $T_{\gamma(a)}$ и $T_{\gamma(b)}$ (эта изометрия, как правило, зависит от пути!).

Вот как это делается. Говорят, что векторное поле V вдоль кривой $\gamma \in S$ параллельно вдоль этой кривой, если $\nabla V = 0$ для любого $t \in I$. Условие обнуления ковариантной производной принимает вид

$$\dot{V} - (\dot{V}, N)N = 0 \tag{1}$$

Далее заметим, что $(V, N) = 0$ вдоль кривой γ, а потому

$$0 = \frac{d}{dt}(V, N) = (\dot{V}, N) + (V, \dot{N})$$

или

$$(\dot{V}, N) = -(V, \dot{N}).$$

Теперь условие (1) принимает вид линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{V} + (V, \dot{N})N = 0$$

или в развернутом виде

$$\frac{dV_i}{dt} + \left(\sum_{j=1}^{3} \dot{N}_j V_j\right) N_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2}$$

(N_i – координаты нормали N)

По теореме существования и единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка найдется единственное векторное поле V вдоль γ, удовлетворяющее уравнению (2) и начальному условию $V(t_0) = V_0$.

Контрольный вопрос: почему построенное поле касается S?

Если не обращать внимания на некоторые трудности с областью определения решения (определено ли решение для всех $t \in I$?), прикрывшись линейностью системы, то мы доказали следующую теорему.

Теорема 1 *Пусть на поверхности S лежит параметризованная кривая $\gamma : I \to S$, $t_0 \in I$ и $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}$. Тогда существует единственное параллельное векторное поле $V(t)$, касательное к S вдоль γ, для которого $V(t_0) = V_0$.*

Вернемся к нашему пути $\gamma(t)$ между двумя точками m_1 и m_2 на поверхности. Для каждого $V \in T_{\gamma(a)}$ единственным образом определено параллельное поле V вдоль γ. Возникает отображение $P_\gamma : T_{\gamma(a)} \to T_{\gamma(b)}$, $P_\gamma(V) = V(b)$. Оно и называется параллельным переносом вдоль γ.

Перечислим его свойства:

1) P_γ – линейное преобразование
2) P_γ сохраняет скалярное произведение векторов, а значит их длины и углы между ними.

Кривизна, о которой речь пойдет дальше, отражает зависимость P_γ от пути γ.

Наоборот, если на поверхности задан параллельный перенос, то ковариантную производную можно вычислить по известной формуле математического анализа:

$$\nabla V = \frac{d}{dt}\left(P^{-1}_{(t_0,t)}(V(\gamma(t))\right)|_{t=t_0},$$

где $P_{(t_0,t)} : T_{\gamma(t_0)} \to T_{\gamma(t)}$ – параллельный перенос.

4. Ковариантная производная векторного поля вдоль другого векторного поля.

Дело в том, что в любой точке поверхности корректно определена операция $\nabla_T W$ ковариантного дифференцирования векторного поля W на поверхности S по направлению вектора T: пусть m – точка на поверхности, в которой приложен вектор $T \in T_m$.

Выпустим из m любую кривую $\gamma(t)$ по направлению T (это означает, что $\gamma(0) = m, \dot\gamma(0) = T$) и положим по определению $\nabla_T W = \nabla W(\gamma(t)) \mid_{t=0}$.

Таким образом, речь идет о ковариантной производной сужения поля W на кривую γ. От выбора кривой γ ничего не зависит. В самом деле,

$$\nabla_T W = \frac{d}{dT} W - (\frac{d}{dT} W, N) N,$$

где $\frac{d}{dT} W$ – обычная производная вектор-функции $W(t)$ в по направлению T.

Тем самым для двух векторных полей W и V на поверхности определено новое векторное поле $\nabla_V W$, которое называется ковариантной производной векторного поля W вдоль поля V.

К перечисленным в п.2 свойствам ковариантного дифференцирования добавляются еще два.

4) Линейность по направлению

$$\nabla_{aT+bR} W = a\nabla_T W + b\nabla_R W$$

5) Симметричность

$$\nabla_V W = \nabla_W V$$

для любых коммутирующих векторных полей V и W на S (напомним, что векторные поля называются коммутирующими, если они коммутируют как операторы дифференцирования, т. е. $V(Wf) = W(Vf)$ для любой гладкой функции на S).

2 Формула первой вариации длины пути и геодезические

1. Первая вариация.

- Пусть $\gamma(t) : I \to S$ – параметризованная кривая на поверхности S. Вариацией кривой $\gamma(t)$ назовем такое гладкое отображение $\varphi(t,s) : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \ \ (\epsilon > 0)$ прямоугольника $[a,b] \times (-\epsilon, \epsilon)$ в S ($[a,b] \subset I$), что $\varphi(t,0) = \gamma(t)$ для всех $t \in [a,b]$. (смотри рис.1)

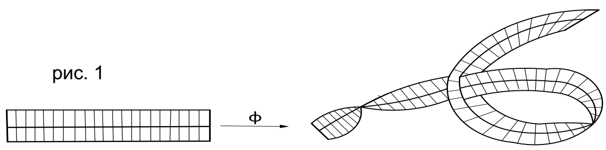


рис. 1

С вариацией связаны два семейства кривых $\gamma_s(t) = \varphi(t,s)$ (s фиксировано) и $\alpha_t(s) = \varphi(t,s)$ (t фиксировано) и два поля скоростей вдоль каждой из них: поле $T(t,s) = \frac{\partial \varphi(t,s)}{\partial t}$ и поле $V(t,s) = \frac{\partial \varphi(t,s)}{\partial s}$, которое мы будем называть полем вариации. Пусть $L(s) = \int_a^b \|T(t,s)\| \, dt$ – длина пути $\gamma_s(t)$ от $t = a$ до $t = b$. Вычислим $\left.\frac{dL(s)}{ds}\right|_{s=0}$, то есть, говоря неформально, найдем скорость изменения длины кривой $\gamma(t)$ при ее «малом шевелении» на поверхности. Для простоты будем считать, что кривая $\gamma(t) = \gamma_0(t)$ параметризована длиной дуги (так называемая натуральная параметризация). Это означает, что $\|T(t,0)(t)\| = 1$ для всех t.

Начнем с простого случая, когда рассматриваемая нами поверхность S есть евклидова плоскость . Тогда последовательно получаем:

$$\left.\frac{d}{ds}L(s)\right|_{s=0} = \frac{d}{ds}\int_a^b (T_s(t), T_s(t))^{1/2}\, dt = \left| \underset{\text{перестаем писать аргументы}}{T_s(t) = \frac{\partial}{\partial t}} \right| =$$

$$= \left.\frac{d}{ds}\int_a^b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{1/2} dt\right|_{s=0} = \left.\int_a^b \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{1/2} dt\right|_{s=0} = \left.\int_a^b \frac{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}} dt\right|_{s=0} =$$

$$= \left| \underset{\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,0)\| = 1}{\text{так как}} \right| = \int_a^b \left.\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right|_{s=0} dt = \left| \underset{\frac{\partial}{\partial s} \text{ и } \frac{\partial}{\partial t} \text{ коммутируют}}{\text{так как координатные поля}} \right| =$$

$$= \int_a^b \left.\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right|_{s=0} dt \qquad (*)$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\,(V,T)=\left(\frac{\partial}{\partial t}V,T\right)+\left(V,\frac{\partial}{\partial t}T\right)=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу $(*)$, получаем окончательно

$$\int_a^b\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\Big|_{s=0}dt=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\Big|_a^b-\int_a^b\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\Big|_{s=0}dt.$$

Итак, мы доказали, что

$$L'(s)\big|_{s=0}=(V(t,0),T(t,0))|_a^b-\int_a^b\left(V(t,0),\frac{\partial}{\partial t}T(t,0)\right)dt \tag{3}$$

Формула (3) называется формулой первой вариации длины пути. Она справедлива для любой вариации любой параметризованной кривой $\gamma(t)$ на плоскости $\mathbb{E}^2$, по которой мы путешествуем с единичной скоростью. Заметим, что интеграл в правой части зависит только от поля ускорения $\ddot\gamma(t)=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\gamma}{\partial t})$ вдоль кривой и поля вариации $V=V(t,0)$ вдоль кривой. Если рассматривать вариацию с закрепленными концами $V(a,0)=V(b,0)=0$, то формула (3) упрощается и принимает вид

$$L'(s)\big|_{s=0}=-\int_a^b(V,\ddot\gamma)dt$$

Что нужно изменить в наших вычислениях, если мы хотим теперь посчитать первую вариацию длины кривой на «искривленной» поверхности S в $\mathbb{E}^3$? Ответ прост: нужно обычное покоординатное дифференцирование заменить ковариантным дифференцированием на поверхности. Вывод формулы (3) будет теперь выглядеть так

$$\frac{d}{ds}L(s)\Big|_{s=0}=\frac{d}{ds}\int_a^b(T,T)^{1/2}dt\Big|_{s=0}=\int_a^b(\nabla_V T,T)dt\Big|_{s=0}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{так как поля}\\ V=\frac{\partial}{\partial s}\text{ и }T=\frac{\partial}{\partial t}\text{ коммутируют}\end{matrix}\right|=\int_a^b(\nabla_T V,T)dt\Big|_{s=0}$$

Но $\frac{d}{dt}(V,T)=(\nabla_T V,T)+(V,\nabla_T T)$. Интегрируя по частям, получаем

$$L'(s)\big|_{s=0}=(V,T)|_a^b-\int_a^b(V,\nabla_T T)\,dt,$$

где V – поле вариаций, а T – поле скоростей вдоль варьируемой кривой $\gamma(t)$.

Для вариации с неподвижными концами получаем

$$L'(s)\big|_{s=0}=-\int_a^b(V,\nabla_T T)=-\int_a^b(V,\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t))dt.$$

(напомним, что $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma((t)$ называется (ковариантным) ускорением вдоль натурально параметризованной кривой на поверхности.

2. Геодезические

Вариация называется нормальной, если поле вариаций V ортогонально полю скоростей T вдоль кривой, т. е. $(V, T) = 0$ вдоль кривой.

Теорема 2 *Пусть $\gamma(t)$ – кривая на поверхности с единичной скоростью. Следующие три условия эквивалентны:*

1. $L'(s)|_{s=0} = 0$ *для любой ее гладкой вариации с фиксированной начальной скоростью (или, говоря по другому, кривая $\gamma(t)$ является стационарной точкой функционала длины).*
2. $L'(s)|_{s=0} = 0$ *для любой нормальной вариации кривой $\gamma(t)$.*
3. $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$.

Набросок доказательства. Ясно, что из 3) $\Rightarrow$ 1) и из 3) $\Rightarrow$ 2). Для того, чтобы доказать, что из 1) следует 3) достаточно уметь строить гладкую вариацию с заданным полем вдоль кривой $\gamma(t)$. В самом деле, предположим, что в какой-то точке t_0 пути $\gamma(t)$ ковариантная производная $\nabla_T T \neq 0$. Тогда она отлична от нуля в некотором интервале U, содержащем точку t_0. Рассмотрим векторное поле $V = f \cdot \nabla_T T$, где f – гладкая неотрицательная функция, носитель которой непуст и лежит в U. Тогда варьируя кривую $\gamma(t)$ с начальной скоростью V, получим по формуле для первой вариации с закрепленными концами, что $L'(s)|_{s=0} = -\int_a^b f\,\|\nabla_T T\|^2\,dt = -\int_U f\,\|\nabla_T T\|^2\,dt < 0$. Противоречие.

Отметим, однако, что $\left(\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\right) = 0$, и, как показывает формула для первой вариации, существенна только составляющая поля вариации V, ортогональная скорости $\dot\gamma(t)$. Следовательно, из 2) $\Rightarrow$ 3). Утверждение же о существовании нормальной вариации с заданным полем вариации V вдоль кривой будет нами вскоре доказано. ■

Определение 1 *Кривая с единичной скоростью называется геодезической, если она удовлетворяет любому из перечисленных ниже требований:*

а) является стационарной точкой функции длины по отношению ко всем гладким вариациям с закрепленными концами

б) является стационарной точкой по отношению к нормальным вариациям

в) $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$.

Задача 1 *Доказать, что если натурально параметризованная кривая является кратчайшей в малом, то она есть геодезическая.*

Отложим до лучших времен утверждение о том, что геодезическая является кривой, кратчайшей в малом.

Замечание 1 *Если вернуться к связности Леви-Чивита из лекции 1, то условие* $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$ *равносильно тому, что вектор ускорения* $\ddot\gamma(t)$ *ортогонален поверхности для любого* t. *Таким образом, согласно Ньютону, равенство нулю ковариантного ускорения, то есть отсутствие сил, действующих на тело вдоль поверхности, означает, что тело движется с ковариантно постоянной скоростью вдоль геодезической на поверхности (или стоит на месте, но этот случай не предусмотрен нашим определением геодезической).*

Быть или не быть отрезку геодезической кратчайшим путем между его концами решается, как в анализе, с помощью второй производной. А она (эта производная) зависит от Чудовища по имени Кривизна.

3 Элементарное введение в теорию кривизны для гиперповерхностей в $\mathbb{E}^n$.

1. Оператор формы.

Всюду в дальнейшем можно считать, что $n = 2$. Рассмотрим в $\mathbb{E}^{n+1}$ гиперповерхность S, ориентированную полем единичных нормалей N, $\|N\| = 1$. Заметим, что в любой точке $m \in S$ и для любого вектора $v \in T_m$ производная $\frac{\partial}{\partial v}$ поля N по направлению вектора v лежит в касательном пространстве T_m (почему?). Таким образом возникает линейный оператор $L_m : T_m \to T_m$, определенный по формуле

$$L_m(v) = \partial_V N \quad \text{(покоординатное дифференцирование по направлению } v\text{)}$$

Так как касательное пространство T_m поворачивается в $\mathbb{E}^{n+1}$ одновременно с поворотом нормали N_m, то вектор $L_m(v)$ можно понимать как скорость поворота касательного пространства в точке m при проезде через эту точку по любой кривой со скоростью v. Оператор L_m называется оператором формы.

Пример 2 *Найдем явный вид оператора формы для n-мерной сферы*

$$S_r : x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = r^2,$$

ориентированной единичным полем нормалей $N = \left(\frac{x_1}{r},\ \dots\ ,\frac{x_{n+1}}{r}\right)$.

По определению,

$$L_{(x_1\ \dots\ x_{n+1})}(v) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{r}\right),\ \dots\ ,\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left(\frac{x_{n+1}}{r}\right)\right), v\right\rangle, \tag{4}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ – скалярное произведение в касательном пространстве $T_{(x_1\ \dots\ x_{n+1})}$.

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) = 1/r + x_i\left(-\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}r}{r^2}\right)$. Кроме того, в силу симметрии $\frac{\partial}{\partial x_i}r = \frac{\partial}{\partial x_j}r$ для любых $i,\ j$. Поэтому скалярное произведение в правой части формулы (4) равно $\frac{v}{r}$ (почему?). Итак, для сферы $L(v) = \frac{v}{r}$, т. е. оператор формы скалярен: его применение заключается в умножении вектора на $1/r$.

В общем случае он самосопряжен, т. е.

$$\langle L(v), w\rangle = \langle v, L(w)\rangle \ \text{ для любых векторов } v, w \in T_m.$$

Замечание 2 *Таким образом, можно в каждом касательном пространстве T_m гиперповерхности S рассмотреть билинейную симметрическую форму $B(u,v) = \langle L(u), w\rangle$. Ассоциированная с ней квадратичная форма $B(u,u)$ называется второй фундаментальной формой гиперповерхности. Подразумевается, что первая квадратичная форма – это метрика, индуцированная на T_m евклидовой метрикой в $\mathbb{E}^{n+1}$.*

Теорема 3 *Оператор формы самосопряжен*

$\square$ Е сли $S = \left\{x \in \mathbb{E}^{n+1}, x = (x_1, \ \dots \ , x_{n+1}), f(x) = 0\right\}, N = \frac{gradf}{\|gradf\|}$, то простое вычисление показывает, что

$$\langle L(u), w\rangle = 1/\left\|gradf\right\| \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i w_j \tag{5}$$

Остается заметить, что правая часть симметрична относительно векторов u и w, поскольку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\blacksquare$

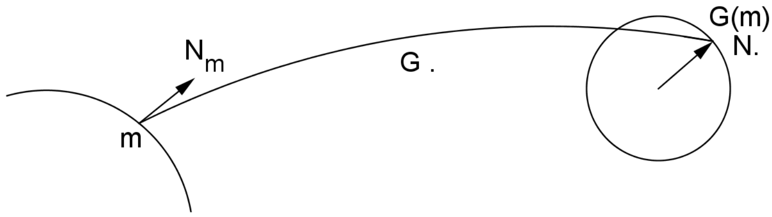
Пусть $(e_1, \ \dots \ , e_n)$ ортонормированный базис касательного пространстваа T_m, состоящий из собственных векторов самосопряженного оператора L_m с собственными значениями $k_1, \ \dots \ , k_m$. Числа $k_1, \ \dots \ , k_m$ называются главными кривизнами гиперповерхности S в точке m, а произведение главных кривизн $\prod k_i = det\ L_m$ называется кривизной Гаусса гиперповерхности S в точке m. Разумеется, если $\|v\| = 1$. то кривизна в напралении v равна $k(v) = \langle Lv, v\rangle$.

Пример 3 *Главные кривизны сферы* $S^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ *равны* $1/r$, *а ее гауссова кривизна* $K = 1/r^n$.

Заметим, что формула (5) дает прямой способ для вычисления кривизны гиперповерхности по направлению.

2. Отображение Гаусса.

Это отображение ставит в соответствие каждой точке $m \in S$ на поверхности ту точку единичной сферы S^n, в которую упирается вектор N_m ориентирующего поля единичных нормалей.



Оператор L является, по определению, дифференциалом отображения Гаусса G. Отметим, что векторы нормалей на поверхности в точке m и на сфере в точке $G(m)$ совпадают, если их рассматривать как векторы в $\mathbb{E}^{n+1}$. Обозначим через ω_{n+1} форму объема $dx_1 \wedge \ \dots \ \wedge dx_{n+1}$ в $\mathbb{E}^{n+1}$, и пусть ω_S, ω_{S^n} – ее ограничения соответсвенно на поверхность S и сферу S^n. Это означает, что $\omega_S(v_1, ..., v_n) = \omega(v_1, ..., v_n, N_m)$ в любой точке $m \in S$ и для любых $v_i \in T_m, \ i = 1, ..., n$. Аналогично строится n-форма ω_{S^n} на сфере. При отображении G форма ω_{S^n} переносится с помощью операции «pull-back»а на поверхность. Получившуюся так форму старшей степени на S обозначим через $(dG)_*\omega_{S^n}$. Тогда $(dG)_*\omega_{S^n} = det\ L \cdot \omega_S$ в каждой точке поверхности (почему?).

Отсюда довольно легко получается практическая формула для вычисления гауссовой кривизны поверхности.

$$\boxed{\text{Практическая формула}} \quad K = det \begin{pmatrix} \partial_{v_1}(grad\ f) \\ \dots \\ \partial_{v_n}(grad\ f) \\ grad\ f \end{pmatrix} / \|grad\ f\|^n \, det \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \\ grad\ f \end{pmatrix},$$

где $(v_1, ..., v_n)$ – произвольный базис в T_m, $m \in S$.

Пример 4 *Вычислим гауссову кривизну гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$ в его произвольной точке (x, y, z).*

$grad\ f = (2x, -2y, 1)$. Поэтому в касательном пространстве T_m лежат векторы $w = (w_1, w_2, w_3)$, удовлетворяющие условию

$$2xw_1 - 2yw_2 + w_3 = 0$$

В качестве базисных, всюду, где $x^2 - y^2 \neq 0$, можно рассмотреть векторы $v_1 = (y, x, 0)$ и $v_2 = (x, y, -2z)$.

Тогда $\partial_{v_1} grad\ f = (2y, -2x, 0)$ и $\partial_{v_2} grad\ f = (2x, -2y, 0)$

$$det \begin{vmatrix} \partial_{v_1}(grad\ f) \\ \partial_{v_2}(grad\ f) \\ grad\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & -2x & 0 \\ 2x & -2y & 0 \\ 2x & -2y & 1 \end{vmatrix} = -4y^2 + 4x^2 = 4z$$

$$det \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ grad\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ x & y & -2z \\ 2x & -2y & 1 \end{vmatrix} = y^2 - 4x^2 z + x^2 = -z(1 + 4x^2 + 4y^2)$$

Тогда

$$k = \frac{4z}{-z(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} = -\frac{4}{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

3. Кривизна. Попытка взлететь.

Выберем в области U на поверхности S координаты (x, y). Пусть $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ – координатные векторные поля. И хотя поля X и Y коммутируют (как дифференциальные операторы на пространстве функций), т. е. $X(Y(f)) = Y(X(f))$ для любой гладкой функции f, операторы ∇_X и ∇_Y, вообще говоря, не коммутируют: для векторного поля Z, вообще говоря, $\nabla_X \nabla_Y Z \neq \nabla_Y \nabla_X Z$.

Разность $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z$ называется оператором кривизны, а скалярная функция четырех векторных аргументов $(R(X, Y)Z, W)$ называется тензором кривизны.

Замечание 3 *Если не предполагать поля X и Y коммутирующими, то оператор кривизны определяется как*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Следующие четыре упражнения объясняют, в частности, почему речь действительно идет о тензоре и обнаруживают некоторые его симметрии. Для простоты мы сохраняем соглашение о том, что $[X, Y] = 0$.

Упражнение 1 *Для любой гладкой функции f*

$$\nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_X \nabla_Y (fZ) = fR(X, Y)Z$$

Упражнение 2 $R(gX, fY)Z = gfR(X, Y)Z$ *для любых гладких функций f и g.*

Упражнение 3 $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

Упражнение 4 $(R(X, Y)Z, W) = (R(Z, W)X, Y)$

Используя эти упражнения, можно показать, что $R(X, Y)Z = 0$ в данной точке поверхности, если хотя бы одно из полей участников равно 0 в этой точке. Отсюда немедленно следует, что значение $R(X, Y)Z$ в точке $m \in S$ зависит *только от значений* полей X, Y, Z в этой точке.

Выберем два единичных ортогональных вектора X и Y в касательном пространстве T_m в точке $m \in S$. Величина $K(m) = (R(X, Y)X, Y)$ называется *гауссовой кривизной поверхности в точке m.*

Начиная с этого момента, мы рассматриваем поверхность S с заданной на ней римановой метрикой. По римановой метрике однозначно восстанавливается связность Леви-Чивита, а по связности Леви-Чивита строится оператор (тензор) кривизны.

Упражнение 5 *Как изменится гауссова кривизна, если риманову метрику на поверхности умножить на два?*

Разберем пример. Пусть риманова метрика в координатах (x, y) на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$g = (dx)^2 + \varphi^2(x, y)(dy)^2 \quad (\varphi(x, y) \text{ – гладкая положительная функция})$$

Вид метрики сразу говорит нам о том (почему?), что $\left\|\frac{\partial}{\partial x}\right\|^2 = 1$, а $\left\|\frac{\partial}{\partial y}\right\|^2 = \varphi^2(x, y)$. Кроме того, $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0$.

Поэтому, $X = \frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial y}$ – суть два ортогональных единичных вектора в каждой точке поверхности. Гауссова кривизна равна

$$K = \frac{1}{\varphi^2}\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Для начала вычислим $R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial x} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial x}$.

Упражнение 6 *Докажите, используя свойства связности Леви-Чивита, что*

а) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = 0$

б) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\varphi_x}{\varphi} \frac{\partial}{\partial y}$

Используя результаты упражнения 6, получаем

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} = -\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = -\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi} \frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\varphi_x}{\varphi} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\varphi_x}{\varphi}^2 \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\frac{\partial}{\partial y}$$

Следовательно, $K = -\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}$. Можно сказать и так: гауссова кривизна в каждой точке поверхности (гладкая функция на S) связана с метрикой дифференциальным уравнением $\varphi_{xx} + K\varphi = 0$ (это уравнение было открыто Гауссом, но носит имя Якоби, который создал вокруг него большую науку).

Отметим одно интересное следствие: если $\varphi(x, y) = ch\ x$, то наша метрика имеет постоянную гауссову кривизну, равную (-1). Контрольный вопрос: можно ли подобрать $\varphi > 0$ так, чтобы $K \equiv 1$?