Зачёт по классическим группам 22.10.2011

1. Пусть W — тавтологическое представление $\mathfrak{sl}_n$. Рассмотрим оператор $\Psi_{a,b}$ свёртки с $\mathrm{Id} \in W^* \otimes W$: $\Lambda^a W \otimes \Lambda^b W^* \to \Lambda^{a-1} W \otimes \Lambda^{b-1} W^*$. Докажите, что $\mathrm{Ker}\Psi_{a,b}$ — неприводимый $\mathfrak{sl}_n$-модуль со старшим весом $\omega_a + \omega_{n-b}$.

2. Пусть V — $2n$-мерное векторное пространство с симплектической формой. Докажите, что при $k > n$ оператор свёртки с формой $\phi_k : \Lambda^k V \to \Lambda^{k-2} V$ инъективен.

3. Пусть $Q \subset \mathfrak{h}^*$ — решётка, порождённая корнями, а $P \subset \mathfrak{h}^*$ — решётка, порождённая фундаментальными весами. Найдите факторгруппу P/Q для всех классических алгебр Ли.

4. Найдите характеры (т.е. все веса с кратностями) всех фундаментальных представлений $\mathfrak{sp}_{2n}$.

5. a) Докажите, что $-1 \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}^*$ лежит в группе Вейля W системы корней $\mathfrak{sp}_{2n}$; b) Напишите выражение -1 через простые отражения $s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}$; c) Докажите, что в выражении -1 через простые отражения не может быть меньше n^2 членов.