"Спецфункции". Тезисы 3-ей лекции.

1. Для вычисления неопределенного интеграла от рациональной функции $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ (здесь $P(x)$ и $Q(x)$ -полиномы), вначале делением полиномов сводят задачу к случаю, когда степень числителя строго меньше степени знаменателя, а затем получившуюся дробь разлагают на простейшие вида $\frac{1}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbb{C}$. Например, для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$ подинтегральное выражение раскладывают в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем уравнение на неопределенные коэффициенты $A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1) = 1$, которое разрешается, например, подстановкой вместо x значений $x = 0, 1, 2$: $A = C = 1/2$, $B = -1$, так что

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2}(\log|x|) + \log|x-2|) - \log|x-1| + C = \log\frac{\sqrt{|x(x-2)|}}{|x-1|} + C.$$

Этот же результат может быть достигнут последовательным применением тождества

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right):$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x-1)}\right) - \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x}.$$

2. Попытка обобщить эти рассуждения на интегралы от рациональных тригонометрических выражений $\int \frac{\sin(x-a_1)\cdots\sin(x-a_n)}{\sin(x-b_1)\cdots\sin(x-b_m)}dx$ с необходимостью приводит к рассмотрению двух видов простейших дробей $\dfrac{1}{\sin(x-a)}$ и $\operatorname{ctg}(x-a)$, появляющихся при делении тригонометрических многочленов. Например,

$$\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)} = \frac{\sin(x-a+(a-b))}{\sin(x-a)} = \cos(a-b)\frac{1}{\sin(x-a)} + \sin(a-b)\operatorname{ctg}(x-a).$$

Теперь для разложения правильной дроби на простейшие необходимы 3 тождества:

$$\frac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\left(\operatorname{ctg}(x-a) - \operatorname{ctg}(x-b)\right),$$

$$\operatorname{ctg}(x-a)\frac{1}{\sin(x-b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\left(\frac{1}{\sin(x-a)} - \frac{\cos(a-b)}{\sin(x-b)}\right),$$

$$\operatorname{ctg}(x-a)\operatorname{ctg}(x-b) = \operatorname{ctg}(a-b)\left(\operatorname{ctg}(x-a) - \operatorname{ctg}(x-b)\right) - 1.$$

Последнее тождество является переизложением формулы котангенса разности углов:

$$\operatorname{ctg}(u-v)=\frac{1+\operatorname{ctg}u\operatorname{ctg}v}{\operatorname{ctg}v-\operatorname{ctg}u}.$$

Например, для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)}$ разложим подинтегральное выражение

$$\frac{1}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)}=\frac{1}{\sin(x-a_1)}\left(\frac{1}{\sin(a_2-a_3)}\left(\operatorname{ctg}(x-a_2)-\operatorname{ctg}(x-a_3)\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\sin(a_2-a_3)}\left(\frac{1}{\sin(a_2-a_1)}\left(\frac{1}{\sin(x-a_2)}-\frac{\cos(a_1-a_2)}{\sin(x-a_1)}\right)-\left(\frac{1}{\sin(x-a_3)}-\frac{\cos(a_1-a_3)}{\sin(x-a_1)}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)}\frac{1}{\sin(x-a_1)}+\frac{1}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)}\frac{1}{\sin(x-a_2)}+$$
$$\frac{1}{\sin(a_3-a_1)\sin(a_2-a_2)}\frac{1}{\sin(x-a_3)}+C,$$

так что

$$\int\frac{dx}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\log\operatorname{tg}\frac{x-a_i}{2}}{\prod_{j\neq i}\sin(a_i-a_j)}+C,$$

поскольку

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$$

3. Для доказательства формулы дополнения Эйлера

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

достаточно доказать равенство логарифмических производных от обеих частей равенства:

$$\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{d}{dz}\log\frac{\pi}{\sin\pi z}=-\pi\operatorname{ctg}\pi z.$$

В самом деле, если логарифмические производные совпадают, то логарифмы обеих частей равенства отличаются на постоянную величину, и $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{A}{\sin\pi z}$ для некоторой постоянной A, отличной от нуля. Устремим в последнем равенстве z к нулю. В этом пределе $\Gamma(z)$ ведет себя как $1/z$, $\Gamma(1-z)$ стремится к 1, а $1/\sin\pi z$ ведет себя как $1/\pi z$. Значит, постоянная A с необходимостью равна π.

Благодаря свойствам логарифма, логарифмическая производная произведения равна сумме логарифмических производных сомножителей, логарифмическая производная частного равна разности соответствующих логарифмических производных. Пользуясь представлением Вейерштрасса для $\Gamma(z)$, имеем:

$$\frac{d\log\Gamma(z)}{dz}=-\gamma-\frac{1}{z}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right)=-\gamma-\frac{1}{z}+z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(z+n)}.$$

Благодаря присутствию слагаемых $1/n$ этот ряд сходится абсолютно в любой конечной области, не содержащей целых неположительных точек. Аналогично,

$$\frac{d\log\Gamma(1-z)}{dz} = \gamma + \frac{1}{1-z} - \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1-z}\right),$$

так что

$$\frac{d\log\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{dz} = -\frac{1}{z} - \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) - \lim_{N\to\infty}\frac{1}{z-N-1} = -\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z+n}.$$

Предел суммы от $-N$ до N сходится при нецелом z и носит название суммирования по Эйзенштейну:

$$\frac{d\log\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{dz} = -{\sum_{n\in\mathbb{Z}}}_e \frac{1}{z+n}.$$

Таким образом, задача сводится к доказательству тождества

$$\pi\operatorname{ctg}\pi z = {\sum_{n\in\mathbb{Z}}}_e \frac{1}{z+n}.$$

Можно пойти двумя путями: либо проверить, что обе части предполагаемого равенства удовлетворяют одному и тому же функциональному соотношению (формула котангенса суммы углов), лбо одному и тому же дифференциальному уравнению. Выберем второй способ. Поскольку $\operatorname{ctg}' x = -1/\sin^2 x = -\operatorname{ctg}^2 x - 1$, функция $y = \pi\operatorname{ctg}\pi z$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dz} = -y^2 - \pi^2.$$

Попытка проверить это уравнение для Эйзенштейновского ряда $\sum_e \frac{1}{z+n}$ наталкивается на трудности в пересуммировании квадрата симметричной суммы; непонятно также, как при правильном пересуммировании может возникнуть слагаемое π^2. Поэтому применим испытанный прием: облегчим себе задачу, продифференциировав еще раз полученное выше дифференциальное уравнение, иными словами, попытаемся проверить, что функция

$$y(z) = {\sum_{n\in\mathbb{Z}}}_e \frac{1}{z+n}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' = -2yy',$$

что сводится к проверке соотношения

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+k)^3} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^2}\right)\left({\sum_{m\in\mathbb{Z}}}_e \frac{1}{z+m}\right),$$

в котором левая часть и первый сомножитель правой части представлены абсолютно сходящимися (при нецелом z) рядами, для которых порядок суммирования не важен. После вычитания слагаемых с $n = m$ приходим к необходимости доказывать тождество

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{m=-N,\\ m\neq n}}^{N}\frac{1}{(z+n)^2}\cdot\frac{1}{z+m}=0.$$

Опять же, в силу сходимости ряда обратных квадратов, в нем допускается изменение порядка суммирования.

Раскладываем на простейшие дроби:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+n)^2}\cdot\frac{1}{z+m} =&\frac{1}{(m-n)}\frac{1}{z+n}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z+m}\right)=\\ =&\frac{1}{(m-n)}\frac{1}{(z+n)^2}-\frac{1}{(m-n)^2}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z+m}\right),\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{m=-N,\\ m\neq n}}^{N}\frac{1}{(z+n)^2}\cdot\frac{1}{z+m}=\\ =&\lim_{N\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{m=-N,\\ m\neq n}}^{N}\left(\frac{1}{(m-n)}\frac{1}{(z+n)^2}-\frac{1}{(m-n)^2}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z+m}\right)\right)\end{aligned}$$

При фиксированном n

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{m=-N,\\ m\neq n}}^{N}\frac{1}{(m-n)}=0,$$

в другом же слагаемом, в силу симметричности,

$$\sum_{\substack{m,n=-N,\\ m\neq n}}^{N}\frac{1}{(m-n)^2}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z+m}\right)=0,$$

так что и общий предел равен нулю. Итак, ряд Эйзенштейна $y(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}_e\,\frac{1}{z+n}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''=-2yy'$, т.е., $(y'+y^2)'=0$, откуда $y'=-(y^2\pm C^2)$ для некоторой постоянной C и некоторого знака $+$ или $-$. Такое уравнение интегрируется разделением переменных:

$$\int\frac{dy}{y^2\pm C^2}=-\int dz.$$

Если знак при C^2 отрицателен, то интеграл в левой части равен $\dfrac{1}{2C}\log\dfrac{y-C}{y+C}$, так что $y = C\operatorname{cth}(Cz+D)$ для некоторой константы D, что не является периодической функцией с периодом 1. Точно также отметается случай $C=0$. Для положительного знака получаем решение $\dfrac{1}{C}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{C} = -z+D$, так что $y = C\operatorname{ctg} C(z+D)$. Последняя функция имеет период 1 только если $C = \pi$. Итак, ряд Эйзенштейна $y(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = -y^2 - \pi^2.$$

Отсюда следует, что ряд Эйзенштейна $y(z) = \sum_{\substack{e \\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{1}{z+n}$ отличается от функции $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ на сдвиг D аргумента z. Поскольку же обе функции ведут себя при стремлении z к нулю как $1/z$, сдвиг равен нулю и функции совпадают, что и доказывает формулу дополнения Эйлера.

4. Эту же постоянную C^2 можно вычислить и другим способом. Функция

$$\tilde{y}(z) = y(z) - \frac{1}{z} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$$

регулярна в нуле. Разложим ее в ряд Тейлора в нуле, воспользовавшись разложениями

$$\frac{1}{z-n} = -\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{n^{k+1}}, \qquad \frac{1}{z+n} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-z)^k}{n^{k+1}},$$

абсолютно сходящимися при $|z| < 1$. Получим соотношение $\tilde{y} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k$, где $\gamma_k = 0$, если k четно, и $\gamma_k = -2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{k+1}}$, если k нечетно. В частности, $\gamma_0 = \gamma_2 = 0$ и $\gamma_1 = -2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, так что

$$y(z) = \frac{1}{z} + \gamma_1 z + o(z^2).$$

Подставляя это разложение в дифференциальное уравнение $y' = -y^2 - C^2$,

$$-\frac{1}{z^2} + \gamma_1 + o(z) = -\left(\frac{1}{z} + \gamma_1 z + o(z^2) \right)^2 - C^2 = -\frac{1}{z^2} - 2\gamma_1 - C^2 + o(z),$$

получаем $C^2 = -3\gamma_1$, т.е.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$