Вводная лекция

1 Релятивистская инвариантность

2 Электромагнитное поле

3 Скалярное поле, лагранжианы

4 Электромагнитное поле. Волны

5 Запаздывающие потенциалы

5.1 Электромагнитный ток

Ток $j_\mu(x)$:

$$\frac{1}{c}\int d^4x A_\mu(x) j^\mu(x) = \sum_I \frac{e_I}{c}\int A_\mu(x_I)dx_I^\mu$$

$$j^\mu(x) = \sum_I e_I \int dx_I^\mu \delta^{(4)}(x - x_I) = \tag{5.1}$$

$$= \sum_I e_I \int dt_I \delta(t - t_I)\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\frac{dx_I^\mu}{dt} = (c\rho, \mathbf{j})$$

где компоненты 4-тока: плотность заряда и плотность электрического тока

$$\rho = \sum_I e_I \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I), \quad Q = \int d^3x\rho = \sum_I e_I$$

$$\mathbf{j} = \sum_I e_I \mathbf{v}_I \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \tag{5.2}$$

Упражнение: доказать $\partial_\mu j^\mu = 0$ или $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0$. Если это уравнение не выполняется, то плохо - взаимодействие калибровочно не инвариантно

$$\delta_\varepsilon A_\mu = \partial_\mu \varepsilon, \quad \delta_\varepsilon j^\mu = 0$$
$$\delta \int d^4x A_\mu j^\mu = \int d^4x \partial_\mu \varepsilon j^\mu = -\int d^4x \varepsilon \partial_\mu j^\mu \tag{5.3}$$

В интегральной форме это означает

$$\int d^3x \frac{\partial\rho}{\partial t} + \int d^3x \ \mathrm{div}\mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\rho + \int d^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{j} = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \int d^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{j} = \frac{\partial Q}{\partial t} + I = 0 \tag{5.4}$$

что измерение полного заряда равно полному току через окружающую заряд поверхность.

5.2 Функции Грина

Уравнения Максвелла с источником $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 4\pi j_\nu$, или

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 4\pi j_\nu \tag{5.5}$$

где, с необходимостью, $\partial_\mu j^\mu = 0$. Будем решать уравнение (5.5) с точностью до свободного решения. Перейдем опять к Фурье-образам

$$k_\mu k^\mu a_\nu(k) - k_\nu k^\mu a_\mu(k) = -4\pi J_\nu(k), \qquad \text{or}$$
$$k^2 \Pi_{\mu\nu}(k) a^\nu(k) = -4\pi J_\mu(k), \quad \Pi_{\mu\nu}(k) = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{5.6}$$

где мы ввели *поляризационный оператор* $\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi_{\nu\mu}(k)$:

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0, \qquad \Pi_{\mu\nu}(k)\Pi^\nu_\lambda(k) = \Pi_{\mu\lambda}(k)$$
$$\Pi_{\mu\nu}(k) J^\nu(k) = J_\mu(k) \tag{5.7}$$

потому что ток “поперечен” $k_\mu J^\mu(k) = 0$. Поэтому

$$a_\mu(k) = -\frac{4\pi}{k^2}\Pi_{\mu\nu} J^\nu(k) = -\frac{4\pi}{k^2} J_\mu(k) = a^\perp_\mu(k) \tag{5.8}$$

т.е. это решение с точностью до продольного (калибровочного преобразования) и свободного - свойства проектора.

Возвращаясь в координатное пространство,

$$
\begin{aligned}
A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ikx} a_\mu(k) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ikx}\frac{4\pi J_\mu(k)}{k^2} = \\
= -4\pi\int d^4x' D(x-x') j_\mu(x')
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

(произведение фурье-образов переходит в свертку самих функций), где

$$
\begin{aligned}
j_\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{ipx} J_\mu(p) \\
D(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2}
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

и функция Грина $D(x)$ удовлетворяет уравнению

$$
\Box D(x) = \partial_\mu\partial^\mu D(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ikx} = -\delta^{(4)}(x)
\tag{5.11}
$$

Заметим, что очень похожий объект возник бы в теории свободного скалярного поля с линейным источником

$$
\begin{aligned}
S = \int d^4x \left(\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 - J(x)\phi(x)\right) \\
(\Box + m^2)\phi(x) = -J(x) \\
\phi(x) = \int d^4x' D(x-x';m) J(x')
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

где

$$
\begin{aligned}
(\Box + m^2) D(x;m) &= -\delta^{(4)}(x) \\
D(x;m) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 - m^2}
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

5.3 Вычисление интеграла

Попытаемся вычислить

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 - m^2} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k e^{-i\mathbf{kx}}\int d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m^2} \tag{5.14}$$

Интеграл по нулевой компоненте имеет вид ($\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$)

$$\int d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \mathcal{E}(\mathbf{k})^2} = \int \frac{d\omega}{2\mathcal{E}(\mathbf{k})} e^{i\omega t}\left(\frac{1}{\omega - \mathcal{E}(\mathbf{k})} - \frac{1}{\omega + \mathcal{E}(\mathbf{k})}\right) \tag{5.15}$$

Ответ зависит от до-определения контура интегрирования - как именно обходить полюса! После этого до-определения интеграл по частотам можно вычислить с помощью вычетов. При $|t| \to \infty$ контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости при $t > 0$ или в нижней - при $t < 0$, благодаря фактору $\exp(-t\mathrm{Im}\omega)$, так как

$$\int_{C_R} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m^2} \underset{\omega = Re^{i\varphi}}{\sim} \frac{1}{R}\int_0^{\pi} d\varphi e^{-tR\sin\varphi} \underset{R\to\infty}{\to} 0 \tag{5.16}$$

Пример 1: Запаздывающая функция $D_{\mathrm{ret}}(t,x) = 0$ при $t < 0$. Для этого проведем контур *ниже* обоих полюсов. Тогда

$$\int d\omega e^{i\omega t}\left(\frac{1}{\omega - \mathcal{E}(\mathbf{k})} - \frac{1}{\omega + \mathcal{E}(\mathbf{k})}\right) = 2\pi i \sum \mathrm{res} = \\ = 2\pi i\theta(t)\left(e^{i\mathcal{E}(\mathbf{k})t} - e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{k})t}\right) = -4\pi\theta(t)\sin(\mathcal{E}(\mathbf{k})t) \tag{5.17}$$

и, стало быть,

$$D_{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\theta(t)}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\mathcal{E}(\mathbf{k})}\sin(\mathcal{E}(\mathbf{k})t)e^{-i\mathbf{kx}} \tag{5.18}$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

θ-функция Хевисайда. (Очевидно, что $\theta'(t) = \delta(t)$, доказать на языке линейных функционалов).

Пример 2: Пропагатор Фейнмана $D_{\mathrm{F}}(t,x)$. Для него проведем контур *выше* одного полюса, но ниже другого - заметим, что при этом интеграл по частотам можно деформировать вдоль *мнимой* оси, т.е. перейти от пространства Минковского к 4-му евклидову пространству, если переопределить "мнимость" времени. Тогда

$$
\begin{aligned}
\int d\omega e^{i\omega t}\left(\frac{1}{\omega-\mathcal{E}(\mathbf{k})}-\frac{1}{\omega+\mathcal{E}(\mathbf{k})}\right) = 2\pi i \sum \mathrm{res} = \\
= 2\pi i\left(\theta(t)e^{i\mathcal{E}(\mathbf{k})t}-\theta(-t)e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{k})t}\right)
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

и, стало быть,

$$
D_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\mathcal{E}(\mathbf{k})}\left(\theta(t)e^{i\mathcal{E}(\mathbf{k})t}-\theta(-t)e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{k})t}\right)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}
\tag{5.21}
$$

Заметим теперь, что все интегралы по 3-мерным импульсам имеют вид $\int d^3kf(|\mathbf{k}|)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, а для них ($|\mathbf{k}|\equiv k$, $|\mathbf{x}|\equiv x$, $d^3k = k^2dk\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$)

$$
\begin{aligned}
\int d^3kf(|\mathbf{k}|)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \int_0^\infty k^2dkf(k)\int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta e^{-ikx\cos\vartheta}\int_0^{2\pi}d\varphi = \\
= 2\pi\int_0^\infty k^2dkf(k)\int_{-1}^1 dce^{-ikxc} = \frac{4\pi}{x}\int_0^\infty kdkf(k)\sin(kx)
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Таким образом

$$
\begin{aligned}
D_{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\theta(t)}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\int_0^\infty \frac{kdk}{\mathcal{E}(k)}\sin(\mathcal{E}(k)t)\sin(k|\mathbf{x}|) \\
D_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{x}) = \frac{i}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|}\int_0^\infty \frac{kdk}{\mathcal{E}(k)}\left(\theta(t)e^{i\mathcal{E}(k)t}-\theta(-t)e^{-i\mathcal{E}(k)t}\right)\sin(k|\mathbf{x}|)
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

можно довычислить через цилиндрические функции Бесселя и т.п.

5.4 Безмассовый случай

Если $m=0$, то $\mathcal{E}(k) = |\mathbf{k}| = k$, и интегралы

$$
\begin{aligned}
D_{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\theta(t)}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\int_0^\infty dk\sin(kt)\sin(k|\mathbf{x}|) \\
D_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{x}) = \frac{i}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|}\int_0^\infty dk\left(\theta(t)e^{ikt}-\theta(-t)e^{-ikt}\right)\sin(k|\mathbf{x}|)
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

могут быть вычислены совсем просто. Например,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty dk \sin(kt)\sin(k|\mathbf{x}|) = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\infty dk \left[\left(e^{ik(t-|\mathbf{x}|)} + e^{-ik(t-|\mathbf{x}|)}\right) - \left(e^{ik(t+|\mathbf{x}|)} + e^{-ik(t+|\mathbf{x}|)}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty dk \left(e^{ik(t-|\mathbf{x}|)} - e^{ik(t+|\mathbf{x}|)}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\delta(t-|\mathbf{x}|) - \delta(t+|\mathbf{x}|)\right)
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

то есть

$$
D_{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\theta(t)}{4\pi|\mathbf{x}|}\left(\delta(t-|\mathbf{x}|) - \delta(t+|\mathbf{x}|)\right) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\delta(t-|\mathbf{x}|) \tag{5.26}
$$

и в этом случае даже не возникает проблем с причинностью (которые, вообще говоря, могут быть!). Подставляя в решение (5.9), получаем

$$
\begin{aligned}
A_\mu(x) &= -4\pi \int d^4x' D(x-x') j_\mu(x') = \\
&= \int dt' d^3x' \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} j_\mu(x') = \\
&= \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} j_\mu(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}')
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

запаздывающие потенциалы Лиенара-Вихерта.

При $j_\mu(x) = (\rho, \mathbf{j}) = (\sum_I e_I \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I), \mathbf{0})$ воспроизводится закон Кулона для $A_\mu = (\Phi, \mathbf{0})$

$$
A_0 = \Phi(\mathbf{x}) = \sum_I e_I \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_I) = \sum_I \frac{e_I}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I|} \tag{5.28}
$$