Задачи по классическим группам 2, 31.10.2011–15.11.2011

1. Вычислите характер (все веса с кратностями) следующих неприводимых представлений $\mathfrak{so}_{2n}$: $\Lambda^k(V),\ 0 < k < n,\ V(2\omega_{n-1}),\ V(2\omega_n),\ V(\omega_{n-1}), V(\omega_n)$.

2. Докажите, что $V(\omega_n)$ и $V(\omega_{n-1})$ двойственны друг другу, если n нечётно, и самодвойственны, если n чётно.

3. Докажите, что $V(\omega_n)^{\otimes 2} = V(2\omega_n) \oplus \Lambda^{n-2}V \oplus \Lambda^{n-4}V \oplus \ldots$ и $V(\omega_n) \otimes V(\omega_{n-1}) = \Lambda^{n-1}V \oplus \Lambda^{n-3}V \oplus \ldots$

4. Разложите на неприводимые $\operatorname{Sym}^2 V(\omega_n)$ и $\Lambda^2 V(\omega_n)$.

5. Докажите, что автоморфизм $V = \langle v_1, \ldots, v_{2n}\rangle$, переставляющий v_n и v_{2n} (и оставляющий остальные векторы на месте), индуцирует автоморфизм $\mathfrak{so}_{2n}$, который сохраняет простые корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ и меняет местами α_{n-1} и α_n. Соответственно, последние два фундаментальных веса меняются местами, а остальные остаются неподвижными.

6. Вычислите характеры следующих неприводимых представлений $\mathfrak{so}_{2n+1}$: $\Lambda^k V,\ 1 \leq k \leq n,\ V(\omega_n)$.

7. Докажите, что $V(\omega_n) \otimes V(\omega_n) = \Lambda^n V \oplus \Lambda^{n-1} V \oplus \Lambda^{n-2} V \oplus V \oplus \mathbb{C}$.

8. Разложите на неприводимые $\operatorname{Sym}^2 V(\omega_n)$ и $\Lambda^2 V(\omega_n)$.

9. Докажите, что ядро свёртки ϕ_d : $\operatorname{Sym}^d V \to \operatorname{Sym}^{d-2} V$ с симметрической билинейной формой $Q \in V^* \otimes V^*$, сохраняемой $\mathfrak{so}_m$, является неприводимым $\mathfrak{so}_m$-модулем со старшим весом $d\omega_1$.

10. Докажите, что $\operatorname{Sym}^d V = V(d\omega_1) \oplus V((d-2)\omega_1) \oplus \ldots \oplus V((d-2p)\omega_1)$, где $p = [\frac{d}{2}]$.

11. a) Докажите, что если m нечётно, то $O_m = SO_m \times \{\pm 1\}$. b) Докажите, что если λ и μ — ассоциированные разбиения, то $S_{[\mu]}V = S_{[\lambda]}V \otimes \operatorname{sign}$.