6.1 (*интегрирование по частям*)**.** Пусть u, v — дифференцируемые функции, причем либо $u'v$, либо $v'u$ имеет первообразную. Докажите, что $\int u'v\,dx = uv - \int v'u\,dx$.

6.2. Докажите следующие формулы:

1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{const} \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$; **2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln|x| + \mathrm{const}_1 & \text{при } x > 0; \\ \ln|x| + \mathrm{const}_2 & \text{при } x < 0; \end{cases}$

3) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + \mathrm{const}$; **4)** $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + \mathrm{const}$;

5) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathrm{const} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

6) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + \mathrm{const}$; **7)** $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + \mathrm{const}$;

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \mathrm{const}$; **9)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \mathrm{const}$;

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsh} x + \mathrm{const} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \mathrm{const}.$

6.3. Докажите, что любая рациональная функция представима в виде суммы многочлена и нескольких рациональных функций вида $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$ (где $A, B, C, a, p, q \in \mathbb{R}$ и $p^2 - 4q < 0$).

Указание. Воспользуйтесь следующим фактом (он либо был, либо скоро будет доказан в курсе алгебры): каждый многочлен над $\mathbb{R}$, отличный от константы, разлагается в произведение множителей степени 1 и множителей степени 2 с отрицательными дискриминантами.

6.4. Пусть $c > b^2$ и $\Delta = \sqrt{c - b^2}$. Положим $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2bx+c)^n}$. Докажите, что

$$I_1 = \frac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+b}{\Delta}\right)}{\Delta} + \mathrm{const},$$

$$I_n = \frac{x+b}{2\Delta^2(n-1)(x+2+2bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\Delta^2(n-1)} I_{n-1} + \mathrm{const} \quad \text{при } n > 1;$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2bx+c| - bI_1 + \mathrm{const};$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2bx+c)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+2bx+c)^{n-1}} - bI_n + \mathrm{const}.$$

6.5. Найдите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; **2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; **3)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$; **4)** $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$; **5)** $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$; **7)** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^4 x}$; **8)** $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$; **9)** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$; **10)** $\displaystyle\int \frac{dx}{((x-1)(x+1)^2)^{1/3}}$.

6.6. Пусть R — рациональная функция двух переменных. Придумайте способ, позволяющий вычислять интегралы вида **1)** $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$; **2)** $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$; **3)** $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\,dx$; **4)** $\int R(x, \sqrt{x^2+x^3})\,dx$.

Указание (*рациональная параметризация кривых*). Нарисуйте гиперболу $x^2 - y^2 = 1$, проведите через ее точку $(1, 0)$ прямую под углом φ к оси Ox и выразите координаты (x, y) точки на гиперболе как рациональные функции от $t = \operatorname{tg}\varphi$.

6.7. Вычислите $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.