1 Различные типы полей в классической теории

- Вещественное скалярное поле φ. Типичная плотность лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - V(\varphi)$$

- Комплексное скалярное поле φ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\bar{\varphi} - V(\varphi,\bar{\varphi})$$

- Скалярное поле с внутренними симметриями (принимает значение в алгебре Ли, группе Ли или однородном пространстве). Например, главное киральное поле $g \in SL(N)$ имеет плотность лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathrm{tr}\,(\partial_\mu g\,\partial^\mu g^{-1})$$

- Векторное поле. Пример: электромагнитное поле A_μ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Векторное поле A_μ с внутренними ("цветовыми") симметриями: A_μ – эрмитова матрица в "цветовом" пространстве, $\mathsf{A}_\mu = \{A_\mu^{ab}\}$, $\mathsf{A}_\mu^\dagger = \mathsf{A}_\mu$ (поле Янга-Миллса). Плотность лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\mathrm{tr}\,(\mathsf{F}^{\mu\nu}\mathsf{F}_{\mu\nu})\,, \qquad \mathsf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathsf{A}_\nu - \partial_\nu\mathsf{A}_\mu + [\mathsf{A}_\mu,\,\mathsf{A}_\nu]$$

2 Тензор энергии-импульса поля

2.1 Вещественное скалярное поле

Если плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ зависит от координат и времени только посредством поля φ, можно написать

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,\nu}}\,\frac{\partial\varphi_{,\,\nu}}{\partial x^\mu}$$

(Здесь и ниже используются стандартные сокращения $\partial_\nu = \partial/\partial x^\nu$, $\partial^\nu = \partial/\partial x_\nu$, $\varphi_{,\,\nu} = \partial_\nu\varphi$, $\varphi^{,\,\nu} = \partial^\nu\varphi$.) Подставив сюда уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,\nu}}\right)$$

видим, что правая часть на уравнении движения является полной производной:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \partial_\nu\left(\varphi_{,\,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,\nu}}\right)$$

что можно записать также в виде

$$\partial_\nu \left(\varphi_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\nu}} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} \right) = 0$$

Иными словами, уравнения движения поля эквивалентны равенству нулю дивергенции тензора

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

т.е.

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

или подробнее

$$\partial_t T^{\mu 0} + \sum_{i=1}^{3} \partial_i T^{\mu i} = 0$$

Тензор $T^{\mu\nu}$ называется *тензором энергии-импульса* поля. Равенство $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ локально выражает (и влечет за собой) закон сохранения величин

$$P^\mu = \int T^{\mu 0} d^3\mathbf{x}$$

(интегрирование идет по 3-мерному пространству в момент времени t), которые можно отождествить с компонентами 4-импульса поля.

Для скалярного поля с плотностью лагранжиана $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \, \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Обратим внимание, что он получился симметричен. Его компоненты:

$$T^{00} = \mathcal{H} = \frac{1}{2}(\partial_t \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + V(\varphi)$$

(плотность энергии поля)

$$T^{i0} = \mathcal{P}^i = -(\partial_{x^i} \varphi)(\partial_t \varphi)$$

(плотность импульса поля). Компоненты T^{0i} определяют плотность потока энергии – количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Это можно понять, проинтегрировав равенство $\partial_t T^{00} + \partial_i T^{0i} = 0$ по 3-мерному объему и преобразовав объемный интеграл от дивергенции в поверхностный:

$$\partial_t \int T^{00} d^3\mathbf{x} = -\oint T^{0i} ds_i$$

Слева стоит скорость изменения энергии в объеме, а справа – количество энергии, протекающей через его границу. Симметричность тензора $T^{\mu\nu}$ означает, что в релятивистской теории плотность импульса равна плотности потока энергии (вообще говоря, это независимые величины). Пространственные компоненты T^{ik} выражаются через 3-мерный тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

Отождествление компоненты T^{00} тензора энергии-импульса с плотностью гамильтониана, а интеграла

$$H = \int T^{00} d^3\mathbf{x} = \int \mathcal{H} d^3\mathbf{x}$$

с энергией поля согласовано с гамильтоновым формализмом. Действительно, лагранжиан поля имеет вид $L = \int \mathcal{L}\, d^3\mathbf{x}$, тогда обобщенный импульс $p = p(\mathbf{x})$ (не путать с импульсом поля!) равен

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \varphi)} = \partial_t \varphi$$

а гамильтониан

$$H = \int p(\mathbf{x}) \partial_t \varphi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} - L = \int \Big(\frac{1}{2}\, p^2 + \frac{1}{2}\, (\vec{\nabla}\varphi)^2 + V(\varphi) \Big) d^3\mathbf{x}$$

Очевидно, это выражение совпадает с энергией поля, определенной с помощью тензора энергии-импульса. Введя скобку Пуассона

$$\{p(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}')\} = \{\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')\} = 0\,, \qquad \{p(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

можно показать, что уравнение движение поля записывается в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \{H, \varphi\}\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = \{H, p\}$$

В заключение этого раздела отметим, что определение тензора энергии-импульса не однозначно. Действительно, если $T^{\mu\nu}$ – тензор, определенный как выше, то и

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\alpha \psi^{\mu\nu\alpha}\,, \qquad \psi^{\mu\nu\alpha} = -\psi^{\mu\alpha\nu}$$

удовлетворяет тому же закону сохранения, а выражение для полного 4-импульса поля не меняется. Для однозначного определения тензора энергии-импульса требуют его симметричности. Глубокий смысл этого условия станет понятным при рассмотрении теории поля в искривленном пространстве-времени (в общей теории относительности).

2.2 Электромагнитное поле

Применение того же метода к электромагнитному полю с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\,, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

дает

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = -(\partial^\mu A^\alpha) F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{4}\, \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

Этот тензор не симметричен. Для его симметризации можно прибавить к нему $(\partial_\alpha A^\mu) F^{\nu\alpha}$. Поскольку в отсутствие зарядов $\partial_\alpha F^{\nu\alpha} = 0$, можно написать

$$(\partial_\alpha A^\mu) F^{\nu\alpha} = \partial_\alpha (A^\mu F^{\nu\alpha})$$

Тензор $F^{\mu\nu}$ антисимметричен, и, следовательно, добавка имеет как раз тот вид, который указан в конце предыдущего раздела, и потому может быть прибавлена к тензору энергии-импульса без изменения его физических свойств. Симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{4}\, \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

В качестве упражнения предлагается написать явные выражения его компонент через электрическое и магнитное поля и обсудить их смысл.

3 Модели теории поля в $1+1$ измерениях (необязательный раздел)

В $1+1$ измерениях имеется ряд важных нетривиальных моделей теории поля, которые могут быть решены точно. Их роль и значение:

- служат упрощенными моделями реалистических теорий поля
- играют фундаментальную роль в современной теоретической физике высоких энергий (теории струн)

На примерах можно увидеть, что в $1+1$ измерениях частицы можно рассматривать как возбуждения ("сгустки") поля.

Рассмотрим, например, модель склярного поля с потенциалом

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\, m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\, g^2\varphi^4$$

Уравнение движения

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + m^2\varphi - 2g^2\varphi^3 = 0$$

имеет точное решение

$$\varphi(x,t) = \pm \frac{m/g}{\cosh \dfrac{m(x-vt)}{\sqrt{1-v^2}}}$$

которое описывает движение локализованного в пространстве (точнее, экспоненциально убывающего) возбуждения (солитона) со скоростью v. В модели с потенциалом

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\, m^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\, g^2\varphi^4$$

имееется точное решение типа кинка

$$\varphi(x,t) = \pm \frac{m}{\sqrt{2}\, g}\, \tanh \frac{m(x-vt)}{\sqrt{1-v^2}}$$

с разной асимптотикой на $-\infty$ и $+\infty$. Подобные "одночастичные" решения – не редкость в $1+1$ мерных теориях поля. Их можно трактовать как частицы с массой, обратно пропорциональной константе связи g. Однако, точные решения, описывающие взаимодействие двух, трех и т.д. возбуждений такого типа, как правило, отсутствуют. Их наличие является признаком точной интегрируемости модели.

Модель синус-Гордон (СГ)

Одной из наиболее известных точно интегрируемых моделей является модель синус-Гордон (СГ) с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}\,(\partial_x\varphi)^2 + \frac{m^2}{\beta^2}\Big(\cos(\beta\varphi) - 1\Big)$$

и уравнением движения

$$\partial_t^2\varphi - \partial_x^2\varphi + \frac{m^2}{\beta}\sin(\beta\varphi) = 0$$

которое называется уравнением СГ. В переменных светового конуса $\xi_\pm = \frac{1}{2}(x \pm t)$ оно принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_+\partial\xi_-} = \frac{m^2}{\beta}\sin(\beta\varphi)$$

Точная интегрируемость модели СГ (как и всех известных сегодня нелинейных интегрируемых моделей теории поля) основана на том факте, что *нелинейное* уравнение СГ можно представить как условие совместности переопределенной системы *линейных* уравнений на вспомогательную вектор-функцию Ψ:

$$\begin{cases} \partial_x\Psi = U(\lambda)\Psi \\ \\ \partial_t\Psi = V(\lambda)\Psi \end{cases}, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

Матрицы U, V зависят от дополнительного комплексного параметра λ (который называется спектральным параметром) и имеют вид

$$U(\lambda) = \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} \beta\partial_t\varphi & -m\left(\lambda e^{\frac{i\beta}{2}\varphi} + \lambda^{-1}e^{-\frac{i\beta}{2}\varphi}\right) \\ \\ m\left(\lambda e^{-\frac{i\beta}{2}\varphi} + \lambda^{-1}e^{\frac{i\beta}{2}\varphi}\right) & -\beta\partial_t\varphi \end{pmatrix}$$

$$V(\lambda) = \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} \beta\partial_x\varphi & -m\left(\lambda e^{\frac{i\beta}{2}\varphi} - \lambda^{-1}e^{-\frac{i\beta}{2}\varphi}\right) \\ \\ m\left(\lambda e^{-\frac{i\beta}{2}\varphi} - \lambda^{-1}e^{\frac{i\beta}{2}\varphi}\right) & -\beta\partial_x\varphi \end{pmatrix}$$

Условие совместности линейных уравнений имеет вид условия нулевой кривизны для связности (U, V), которое должно быть выполнено при всех λ:

$$\partial_t U(\lambda) - \partial_x V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0$$

Простое вычисление показывает, что оно эквивалентно уравнению СГ.

Смысл условия нулевой кривизны в том, что если оно выполняется, результат интегрирования системы линейных уравнений на плоскости t, x не зависит от порядка, в котором производится интегрирование. Например, из точки $(0,0)$ в точку (t,x) можно попасть разными способами: сначала $(0,0) \longrightarrow (0,x)$, а потом $(0,x) \longrightarrow (t,x)$, либо сначала $(0,0) \longrightarrow (t,0)$, а потом $(t,0) \longrightarrow (t,x)$, и результаты совпадут. Это и означает совместность двух уравнений.

Польза представления нулевой кривизны, зависящего от параметра λ, в том, что оно сразу позволяет построить бесконечный набор интегралов движения. Рассмотрим, например, периодические граничные условия в пространстве на отрезке $[0, L]$. Пусть $\mathsf{T}(\lambda, t)$ – матрица перехода на период для первого линейного уравнения в момент времени t, т.е.

$$\Psi(L, t) = \mathsf{T}(\lambda, t)\Psi(0, t)$$

Она может быть формально представлена как упорядоченная экспонента

$$\mathsf{T}(\lambda, t) = \overleftarrow{\exp} \int_0^L U(x,t;\lambda)dx$$

Как уже было сказано, условие нулевой кривизны гарантирует независимость результата интегрирования от пути. Легко понять, что в совокупности с периодичностью с периодом L это означает, что матрицы перехода для моментов времени t_1 и t_2 подобны:

$$\mathsf{T}(\lambda, t_2) = \mathsf{S}(t_1, t_2; \lambda)\mathsf{T}(\lambda, t_1)\mathsf{S}^{-1}(t_1, t_2; \lambda)$$

с матрицей

$$\mathsf{S}(t_1, t_2; \lambda) = \overleftarrow{\exp} \int_{t_1}^{t_2} V(0,t;\lambda)dt = \overleftarrow{\exp} \int_{t_1}^{t_2} V(L,t;\lambda)dt$$

(второе равенство имеет место в силу периодичности) и, значит, все коэффициенты разложения следа матрицы $\mathsf{T}(\lambda, t)$ в ряд по λ – интегралы движения, т. е.

$$\operatorname{tr} \mathsf{T}(\lambda, t) = \sum_n H_n \lambda^n$$

и $dH_n/dt = 0$.