## 1. Геометрическая оптика

Основные идеи гамильтоновой механики пришли из геометрической оптики. Поэтому мы сначала обсудим основные приницы геометрической оптики, а потом сформулируем аналогичные принципы гамильтоновой механики.

Будем рассматривать распространение света как движение частиц — фотонов. По какой траектории движется фотон? Оказывается, в большинстве случаев траектория может быть найдена, исходя из следующего принципа, сформулированного Ферма в 1650 году: *свет выбирает такую траекторию между двумя точками, движение по которой занимает минимальное время.*

Принципу Ферма предшествовали как экспериментальные, так и теоретические исследования движения света. Очень много было сделано греками. Птолемей, отказавшись от греческой традиции изучать явления природы умозрительно и дедуктивно, проводил множество экспериментов. В частности, он оставил таблицы зависимости углов преломления от углов падения. Герон Александрийский сформулировал принцип наименьшего расстояния, который применим к однородным и изотропным средам. Согласно принципу Герона, свет в таких средах должен распространяться по прямой. Но этот принцип не объяснял явление преломления. Принцип Ферма объясняет эффект преломления, а также множество других эффектов.

Например, для конструкции линз достаточно пользоваться только принципом Ферма. На закате, когда мы видим солнце у самого горизонта, оно на самом деле уже зашло, то есть прямая, соединяющая нас (наблюдателя) и солнце, пересекает земную поверхность. То, что мы все таки видим солнце, связано с изгибанием лучей. Лучи изгибаются, чтобы минимизировать свой путь через плотные слои атмосферы, в которых скорость света ниже. С изгибанием лучей связано еще и то, что видимая форма солнца на закате не круглая, а сплюснутая.

На горячем асфальте или горячем песке можно увидеть мираж. Лучи как бы отражаются от горячего потока воздуха. На самом деле, это явление можно объяснить при помощи принципа Ферма: лучам выгодно изгибаться и проходить существенное расстояние через горячий воздух, потому что скорость света в горячем воздухе больше, чем в холодном.

Постараемся формализовать принцип Ферма. Мы предполагаем, что скорость света в данной точке зависит только от точки и от направления, в котором движется свет (но не от того, скажем, где

расположен источник света и какова его интенсивность). Скорость света в данной среде тем самым полностью определяется физическими свойствами среды. Среда называется *изотропной*, если скорость света зависит только от точки, но не от направления. Будем полагать для простоты, что среда изотропна. Тогда скорость света можно изобразить функцией точки.

Вообще-то, свет распространяется в трехмерном пространстве, но мы будем считать, что он распространяется на плоскости. Пусть $v(x, y)$ — скорость света в точке с координатами $x$ и $y$. Тогда световая траектория минимизирует интеграл

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \frac{ds}{v(x,y)}$$

Этот интеграл взят по кривой, соединяющей точки $(x_0, y_0)$ и $(x_1, y_1)$ (эти точки зафиксированы), и называется *оптической длиной кривой*. Параметр $s$ — натуральный параметр на кривой (то есть такой параметр, приращение которого на произвольной дуге кривой равно длине этой дуги). Интеграл можно воспринимать как одномерный интеграл

$$\int\limits_0^L \frac{ds}{v(x(s), y(s))},$$

где $L$ — длина кривой, а $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрическое уравнение кривой через натуральный параметр $s$. Тем самым, оптическая длина является функцией от кривой, и она определена на всех достаточно гладких кривых с фиксированными концами. Принцип Ферма утверждает, что свет движется по кривой, на которой эта функция достигает своего минимума.

Принцип Ферма нуждается в некоторых уточнениях. Например, нужно допускать не только такие траектории, вдоль которых время прохождения минимально, но и трактории, соответствующие любым критическим точкам функционала времени прохождения. Эта модификация аналогична тому, что вместо минимума какой-либо функции от одной действительной переменной мы рассматриваем такое значение переменной, при котором производная функции равна нулю. Точки минимума этому условию удовлетворяют, но не только они.

Рассмотрим однородную и изотропную среду, то есть такую среду, в которой скорость света не зависит ни от точки, ни от направления. Тогда оптическая длина кривой пропорциональна обычной

евклидовой длине кривой. Таким образом, минимизировать время — то же самое, что минимизировать длину. Мы знаем, какие кривые в евклидовом пространстве имеют минимальную длину — это прямые линиии. Таким образом, в однородной и изотропной среде распространение света происходит вдоль прямолинейных лучей.

Правда, эти лучи могут отражаться от поверхностей, что непосредственно не следует из принципа Ферма, если понимать его буквально. Скажем, если луч света выбирает между тем, чтобы пойти по прямой или отразиться, скажем, от поверхности озера, то, согласно принципу Ферма, он должен выбрать первое. В природе же выбираются оба варианта; хотя второй вариант выбирается, так сказать, с меньшим весом, зависящим от отражающей способности поверхности.

Допустим, что луч должен отразиться от гладкой поверхности. То, как именно луч это делает, описывается принципом Ферма. Рассмотрим для простоты плоскую задачу. Луч света выходит из точки $A$ и отражается от прямой $l$. Наблюдатель находится в точке $B$ и видит отраженный свет. По какой кривой идет свет от точки $A$ до точки $B$?

Это математическая задача:

*Задача* 1. Найдите кривую наименьшей длины, соединяющую точки $A$ и $B$ и имеющую хотя бы одну общую точку с прямой $l$. Мы предполагаем, что $A$ и $B$ находятся по одну и ту же сторону от прямой $l$ (иначе задача тривиальна).

Эта задача красиво решается методом отражения, который иногда проходят в школе на геометрии. Но можно эту задачу решать и «в лоб». Для этого нужно заметить, что оптимальная кривая (если она существует) должна состоять из двух прямолинейных отрезков, один из которых идет от точки $A$ до точки $X$ на прямой $l$, а другой от точки $X$ до точки $B$. Таким образом, задача свелась к задаче с единственным параметром. В качестве параметра можно взять координату точки $X$ на прямой $l$. Обозначим эту координату через $u$. Будем писать $X(u)$ вместо $X$, имея в виду точку на прямой $l$ с координатой $u$. Мы, конечно, предполагаем, что координата $u$ выбрана таким образом, что расстояние между точками $X(u)$ и $X(u')$ равно $|u - u'|$.

*Задача* 2. Посчитайте производную по $u$ расстояния между точками $A$ и $X(u)$ (выразите ответ через угол между отрезком $[A, X(u)]$ и прямой $l$).

Пусть $\alpha$ — угол между отрезком $[A, X(u)]$ и прямой $l$. Ответ в задаче такой: $\pm\cos\alpha$. Знак зависит от того, какой именно из двух возможных углов мы принимаем за $\alpha$. Теперь, чтобы найти кратчайший отраженный луч, нам нужно найти минимум следующей функции одной переменной:

$$f(u) = |AX(u)| + |X(u)B|,$$

где $|AX|$ обозначает евклидово расстояние между точками $A$ и $X$. Приравняв производную функции $f$ к нулю, получаем, что угол падения должен быть равен углу отражения.

Переходя из одной однородной изотропной среды в другую, луч преломляется. Это явление связано с тем, что скорость света меняется при переходе из одной среды в другую. Предположим, что одна среда находится в верхней полуплоскости, и скорость света в этой среде равна $c_1$, а вторая среда находится в нижней полуплоскости, и скорость света в этой среде равна $c_2$. Например, можно считать, что сверху находится воздух, а снизу вода. Пусть $l$ — горизонтальная прямая, разделяющая две наши среды. Как и раньше, обозначим через $X(u)$ точку на прямой $l$, координата которой равна $u$.

Допустим, что луч света пытается попасть из точки $A$ в точку $B$, причем первая точка находится в воздухе, а вторая — в воде. Понятно, что сначала луч по прямолинейному отрезку пойдет из точки $A$ в какую-то точку прямой $l$, а потом из этой точки в точку $B$, опять по прямолинейному отрезку. Мы приходим к задаче минимизации следующей функции:

$$f(u) = \frac{|AX(u)|}{c_1} + \frac{|X(u)B|}{c_2}.$$

Приравнивая производную функции $f$ к нулю, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\cos\alpha_1}{c_1} = \frac{\cos\alpha_2}{c_2}.$$

Здесь $\alpha_1$ — это угол между отрезком $[A, X(u)]$ и прямой $l$, а $\alpha_2$ — угол между прямой $l$ и отрезком $[X(u), B]$. Углы выбираются таким образом, что либо оба угла острые, либо оба угла тупые. Мы будем считать, что оба угла острые.

Полученное соотношение между $\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha_2$ называется законом Снелла. Этот закон получил Снелл (вариант: Снеллиус) в 1621 году.

Следующее неформальное рассуждение позволяет обобщить занок Снелла на случай изотропной среды, в которой скорость света

(как скалярная функция точки) зависит только от $y$-координаты. Сначала представим себе среду, состоящую из большого числа горизонтальных слоев. Каждый слой заключен между двумя параллельными горизонтальными плоскостями (точнее, если мы думаем про плоскость, между двумя параллельными горизонтальными прямыми). Допустим, что внутри каждого слоя среда однородная. Обозначим через $c_i$ скорость света в $i$-ом слое. Тогда закон Снелла говорит о том, что величина

$$\frac{\cos\alpha_i}{c_i}$$

постоянна (то есть не зависит от $i$). Теперь будем делать слои все тоньше и тоньше. Любая изотропная среда, в которой скорость света является гладкой функцией $v(y)$ одной только координаты $y$, может быть сколь угодно точно приближена средой состоящей из конечного, но очень большого числа тонких горизонтальных слоев. Переходя к пределу (мы здесь допускаем физический уровень строгости, и не обосновываем законность предельного перехода), получаем, что

$$\frac{\cos\alpha(t)}{v(y(t))} = const$$

вдоль любого светового луча (то есть величина, написанная в левой части, не зависит от $t$). Здесь $t$ — любой параметр на световом луче (например, можно считать, что $x(t)$ и $y(t)$ — это координаты фотона в момент времени $t$). Угол $\alpha(t)$ — это угол между световым лучом и горизонтальным направлением в точке $(x(t), y(t))$. Мы будем называть полученный закон *обобщенным законом Снелла.*

Обобщенный закон Снелла можно переписать как дифференциальное уравнение на траекторию. Обозначим

$$\kappa = \frac{\cos\alpha(t)}{v(y(t))}.$$

Эта величина не зависит от $t$ по обобщенному закону Снелла. Допустим, что траектория светового луча является графиком некоторой функции $y = y(x)$. Тогда можно взять $x$ вместо параметра $t$ на световом луче. Угол $\alpha(x)$, т.е. угол наклона светового луча (по отношению к горизонтальному направлению) связан с производной функции $y(x)$. Именно, как мы знаем, производная равна тангенсу угла наклона. Тангенс и косинус связаны следующей формулой:

$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Таким образом, мы получаем следующее дифференциальное уравнение на световые лучи:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \kappa^2 v^2(y)}}{\kappa v(y)}.$$

Правая часть этого уравения зависит только от $y$. Следовательно, мы получили уравнение с разделяющимися переменными.

## Добавления и задачи.

1.1. **Виллеброрд Снелл (1580–1626).** Голландский математик, физик и астроном, профессор Лейденского университета. Разработал метод триангуляции для геодезических измерений, в частности, для вычисления радиуса Земли. В 1621 году открыл закон преломления света. Впрочем, как выяснилось, этот закон был известен еще персидскому математику и физику Ибн Салю (закон преломления фигурирует в его трактате о конструкции оптических линз, датируемом 984 годом).

1.2. **Пьер де Ферма (1601–1665).** Советник парламента в Тулузе и математик-любитель. Известен своими математическими открытиями, изложенными главным образом в письмах к коллегам-математикам. Автор фундаментальных понятий и методов аналитической геометрии, теории чисел, анализа и теории вероятностей. Ферма сформулировал принцип наименьшего времени и вывел из него закон Снелла (1657). Впрочем, Ферма считал, что свет распространяется с бесконечной скоростью, поэтому формулировка принципа наименьшего времени у него была несколько запутанной.

1.3. **Задача о брахистохроне.** Одно из самых интересных применений обобщенного закона Снелла — задача о брахистохроне. Дано две точки $A$ и $B$, причем точка $B$ находится ниже точки $A$, но не на той же самой вертикали. Рассмотрим различные кривые, соединяющие $A$ с $B$. Представим себе точку, скользящую без трения вдоль этих кривых. *Брахистохрона* — это такая кривая, время скольжения вдоль которой минимально. Все скольжения, которые мы рассматриваем, начинаются в точке $A$ и заканчиваются в точке $B$; начальная скорость всегда нулевая (то есть мы не подталкиваем скользящие частицы).

Задача нахождения брахистохроны может быть формально сведена к задаче геометрической оптики. В самом деле, время скольжения вдоль кривой равно интегралу

$$\int \frac{ds}{v},$$

взятому вдоль этой кривой. Если окажется, что скорость $v$ скольжения точки зависит только от точки, но не от кривой, то задача сведется к геометрической оптике.

Скорость $v$ может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = 0.$$

(Мы направим ось $y$ вниз, поэтому потенциальная энергия убывает с ростом $y$, отсюда знак минус. Мы также предполагаем, что точка $A$ находится на

высоте 0, поэтому потенциальная энергия равна $mgy$. В начальный момент скользящая точка находится на высоте 0, и ее скорость равна нулю, поэтому полная энергия равна нулю.) Находим

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Таким образом, $v$ действительно зависит только от точки, но не от кривой. Более того, $v$ зависит только от координаты $y$. Поэтому мы можем применить обобщенный закон Снелла.

Мы уже выяснили, что обобщенный закон Снелла переписывается как дифференциальное уравнение на световые траектории с разделяющимися переменными. При этом световые траектории ищутся как графики функций $y = y(x)$. В нашем случае, дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - 2g\kappa^2 y}}{\kappa\sqrt{2gy}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\int \frac{\sqrt{2g\kappa^2 y}dy}{\sqrt{1 - 2g\kappa^2 y}} = \int dx.$$

Чтобы вычислить интеграл в левой части, удобно сделать следующую замену переменной:

$$2g\kappa^2 y = \sin^2 \phi$$

(старая переменная $y$, новая переменная $\phi$; эти переменные выражаются одна через другую из уравнения, выписанного выше). Интегрируя, получаем:

$$\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4} = g\kappa^2 x + C.$$

Заменим $2\phi$ на $\phi$ (это просто изменение параметризации кривой), $x$ на $4g\kappa^2 x$ и $y$ на $4g\kappa^2 y$ (это гомотетия, т.е. изменение единицы длины). Получаем:

$$x = \phi - \sin\phi + const, \quad y = 1 - \cos\phi.$$

Как нетрудно видеть, это уравнение описывает *циклоиду*, то есть траекторию точки, прикрепленной к колесу, которое равномерно и без проскальзывания катится по горизонтальной прямой. Точнее, мы получили траекторию точки на колесе, отраженную относительно горизонтальной прямой.

Циклоида — периодическая кривая с счетным числом каспов (клювов). Брахистохрона — это часть циклоиды, начинающаяся в каспе и заканчивающаяся не позже ближайшего минимума. Заметим, что в точке $A$ касательная к брахистохроне вертикальна. Это соответствует интуитивным представлениям: в начальный момент нужно разогнаться как можно сильнее. Впрочем, это свойство брахистохроны делает ее непригодной к решению практических задач (таких как поиск оптимальной формы ледяной горки, туннеля и проч.).

1.4. **Цепная линия.** Обобщенный закон Снелла можно также использовать для нахождения формы цепной линии. Эту форму принимает тонкая цепочка, свободно висящая между двумя закрепленными концами. Будем считать для определенности, что концы цепочки закреплены на одной и той же высоте. Ориентируем ось $y$ вниз, и выберем начало координат так, чтобы закрепленные концы оказались на высоте 0.

Цепочка пытается минимизировать полную потенциальную энергию. Будем считать, что масса цепочки равномерно распределена по ее длине. Тогда потенциальная энергия маленького участка цепочки длины $\Delta s$ примерно равна $-y\,\Delta s$, где $-y$ — высота этого участка (мы считаем плотность равной единице). Следовательно, полная потенциальная энергия цепочки выражается интегралом

$$U = -\int y\,ds.$$

Напомним, что буква $s$ обозначает натуральный параметр на кривой. Однако цепочка не может менять длины. Поэтому интеграл потенциальной энергии нужно минимизировать при условии постоянства длины, т.е.

$$\int ds = L,$$

где $L$ — постоянная величина.

Таким образом, мы обсуждаем задачу нахождения условного экстремума. К этой задаче можно применить принцип множителей Лагранжа. Для нахождения условного экстремума некоторой функции $f$ (определенной, в нашем случае, на бесконечномерном пространстве кривых) при условии $g = 0$, мы делаем вид, что пытаемся найти безусловный экстремум функции $f + \lambda g$ (то есть ищем критические точки этой функции). Здесь $\lambda$ — константа, называемая *множителем Лагранжа*. После того, как критические точки функции $f + \lambda g$ найдены, значение множителя $\lambda$ для этих точек находится из условия $g = 0$.

В нашем случае, мы должны притвориться, что пытаемся минимизировать интеграл

$$\int_\gamma (-y + \lambda) ds$$

по всем кривым $\gamma$ с данной парой закрепленых концов. Экстремум этого интеграла можно найти из обобщенного закона Снелла: сам интеграл имеет вид интеграла оптической длины пути для изотропной среды, в которой скорость света записывается формулой

$$v(y) = \frac{1}{\lambda - y}.$$

Как мы видим, скорость света зависит только от $y$. Из обобщенного закона Снелла получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(\lambda - y)^2}{\kappa^2} - 1},$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{dy}{\sqrt{(\lambda - y)^2 - \kappa^2}} = \frac{dx}{\kappa}.$$

Введем замену переменных $\lambda - y = \kappa \operatorname{ch} \phi$ (старая переменная $y$, новая переменная $\phi$). Интегрируя при помощи этой замены, получаем:

$$y = \lambda - \kappa \operatorname{ch}\left(\frac{x - x_0}{\kappa}\right).$$

Таким образом, с точностью до аффинной замены координат, цепная линия — это график функции гиперболический косинус.

1.5. **Существование световых лучей, соединяющих пары точек.** Рассмотрим изотропную среду, скорость света в которой задается функцией $v(x, y)$. Сформулируем без доказательства следующую теорему: если функция $v(x, y)$ непрерывна, причем $v(x, y) > \varepsilon > 0$ вне некоторого шара, то для каждой пары точек плоскости найдется световой луч, проходящий через эти две точки (то есть такая траектория, на которой интеграл $\int \frac{ds}{v}$ достигает своего наименьшего значения). Существует обобщение этой теоремы на случай неизотропных сред.

1.6. **Задачи.**

*Задача* 3. Выведите из принципа Ферма, что при отражении относительно любой гладкой кривой на плоскости (находящейся в однородной и изотропной среде) угол падения равен углу отражения.

*Задача* 4. Все стены комнаты состоят из зеркал. Источник света помещен в одну точку комнаты. Можно ли подобрать форму комнаты и положение источника так, чтобы не все точки комнаты оказались освещенными?

*Задача* 5. Рассмотрим изотропную среду, занимающую верхнюю полуплоскость $y > 0$, скорость света в которой выражается формулой $v(x, y) = y$. Найдите форму световых лучей в этой среде.

*Задача* 6. Рассмотрим изотропную среду, занимающую внутренность единичного круга, скорость света в которой выражается формулой $v(x, y) = 1-x^2-y^2$. Найдите форму световых лучей в этой среде.

*Задача* 7. Плоскость заполнена однородной и изотропной средой. В плоскости расположено зеркало, форма которого совпадает с графиком функции $f$. Известно, что вертикальный поток световых лучей, падающих на зеркало сверху вниз, отражается таким образом, что отраженные лучи сходятся в некоторой точке (фокусе зеркала). Найдите все функции $f$, обладающие указанным свойством.

*Задача* 8. На плоскости имеется две различные однородные и изотропные среды. Граница раздела между средами имеет форму графика некоторой функции $f$. Известно, что вертикальный поток лучей, падающих сверху вниз, преломляется таким образом, что преломленные лучи собираются в одной точке. Перепишите это условие в виде дифференциального уравнения на функцию $f$. (Скорость света в верхней среде равна $c_1$, а скорость света в нижней среде равна $c_2$). Считая, что $f'(0) = 0$, найдите параболу, лучше всего приближающую график функции $f$ вблизи точки 0.

## 2. Принцип Гюйгенса

Мы пока занимались изучением траекторий отдельного фотона. Однако интересно также иметь описание движения пучка фотонов, или светового пятна. Обычно фотонов очень много. Настолько много, что невозможно следить за отдельными фотонами. Но можно смотреть, как распространяется световое пятно.

Предположим, что фотоны вылетают из точечного источника, и летят во всех возможных направлениях. Какова будет форма светового пятна за время $t$? Обозначим это световое пятно через $X(\mathbf{x}_0, t)$, где $\mathbf{x}_0$ — положение точечного источника. Более точно, $X(\mathbf{x}_0, t)$ — это множество тех точек, в которые свет может попасть за время $\leq t$. В отличие от прошлой лекции, мы сейчас не предполагаем, что среда изотропна. Среда может быть неоднородна и неизотропна.

*Принцип Гюйгенса* описывает закон изменения светового пятна $X(\mathbf{x}_0, t)$. Математически, этот принцип можно выразить следующим образом:

**Теорема 1** (Принцип Гюйгенса). *Для всякого разложения $t = t_1 + t_2$ временного интервала $t$ в сумму двух неотрицательных временных интервалов,*

$$X(\mathbf{x}_0, t) = \bigcup_{\mathbf{x}_1 \in X(\mathbf{x}_0, t_1)} X(\mathbf{x}_1, t_2)$$

Словами эта формула описывается так. Рассмотрим световое пятно за время $t_1$. Поместим в каждую точку этого светового пятна воображаемый источник света, и дадим всем этим источникам светить в течение времени $t_2$. Получится много *вторичных световых пятен*. Нужно взять объединение всех этих вторичных световых пятен, чтобы получить световое пятно за время $t$. Мы докажем принцип Гюйгенса, предполагая, что принцип Ферма справедлив буквально, то есть свет движется только по таким траекториям, вдоль которых время прохождения минимально.

Заметим, что правая часть равенства, выражающего принцип Гюйгенса, включает в себя множество $X(\mathbf{x}_0, t_1)$. Дело в том, что $\mathbf{x}_1$ обязательно принадлежит световому пятну $X(\mathbf{x}_1, t_2)$.

*Доказательство принципа Гюйгенса.* Пусть $\mathbf{x}$ взято из левой части формулы из принципа Гюйгенса, то есть $\mathbf{x} \in X(\mathbf{x}_0, t)$. Свет может дойти от точки $\mathbf{x}_0$ до точки $\mathbf{x}$ за время $s \leq t$. Если $s \leq t_1$, то точка $\mathbf{x}$ принадлежит множеству $X(\mathbf{x}_0, t_1)$, которое, как мы видели, является подмножеством правой части. Если же $s > t_1$, то $s = t_1 + s_2$, где $s_2 \leq t_2$. Рассмотрим траекторию фотона, идущего от $\mathbf{x}_0$ к $\mathbf{x}$. За время $t_1$, фотон доходит до некоторой точки $\mathbf{x}_1 \in X(\mathbf{x}_0, t_1)$, а затем за время $s_2 \leq t_2$ он доходит до точки $\mathbf{x}$, откуда получаем, что $\mathbf{x} \in X(\mathbf{x}_1, t_2)$. Следовательно, $\mathbf{x}$ лежит в правой части.

Допустим теперь, что $\mathbf{x}$ лежит в правой части формулы из принципа Гюйгенса. Это значит, что в $\mathbf{x}$ можно попасть, сначала пройдя вдоль истинной световой траектории от точки $\mathbf{x}_0$ до некоторой

точки $\mathbf{x}_1 \in X(\mathbf{x}_0, t_1)$, а потом пройдя вдоль истинной световой траектории от точки $\mathbf{x}_1$ до точки $\mathbf{x} \in X(\mathbf{x}_1, t_2)$. Мы знаем, что время движения по первой из двух траекторий не превышает $t_1$, а время движения по второй траектории не превышает $t_2$. Объединение двух рассматриваемых истинных световых траекторий может и не быть истинной световой траекторией. Однако это объединение является некоторой кривой, вдоль которой свет может пройти за время $t$ или меньше. Значит, на прохождение света от $\mathbf{x}_0$ до $\mathbf{x}$ по истинной световой траектории понадобится время $\leq t$ (это вытекает из принципа Ферма). $\square$

*Пример* 1. Рассмотрим однородную, но неизотропную, среду. В такой среде все световые пятна за время $t$ отличаются лишь параллельным переносом. Поэтому есть такая фигура $X(t)$, зависящая только от $t$, что

$$X(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0 + X(t)$$

для всякой точки $\mathbf{x}_0$. Здесь $\mathbf{x}_0 + X$ означает параллельный перенос множества $X$ на вектор $\mathbf{x}_0$, то есть множество точек $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in X$. *Сумма Минковского* двух множеств $A$, $B \subset \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in A,\ \mathbf{b} \in B\}.$$

Например, если $B$ — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в нуле, то $A + B$ есть не что иное, как $\varepsilon$-окрестность множества $A$.

*Задача* 9. Пусть $A$ — это объединение двух отрезков на плоскости

$$[(0,0),(1,0)] \cup [(0,0),(0,1)].$$

Нарисуйте множества $A + A$, $A + A + A$, $A + A + A + A$ и сравните их с множествами $2A$, $3A$, $4A$.

Вернемся к обсуждению однородной неизотропной среды. Мы выяснили, что такая среда характеризуется одной функцией $X(t)$, принимающей значения в подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$. Принцип Гюйгенса переписывается как следующее функциональное уравнение:

$$X(t_1 + t_2) = X(t_1) + X(t_2)$$

для любых неотрицательных $t_1$ и $t_2$. Интересно найти все решения этого функционального уравнения при достаточно общих предположениях относительно функции $X(t)$. Естественно считать, что $X(t)$ зависит от $t$ в некотором смысле непрерывно. Заметим, что функция $t \mapsto tA$ является решением нашего уравнения только в том случае, когда множество $A$ выпукло (докажите).

Вернемся к рассмотрению общей (т.е., вообще говоря, неоднородной и неизотропной) среды. Следуя Гамильтону, определим функцию

$$W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \inf\{t \mid \mathbf{x} \in X(\mathbf{x}_0, t)\}.$$

(Если точка $\mathbf{x}$ имеет координаты $(x_0, y_0)$, а точка $\mathbf{x}$ имеет координаты $(x, y)$, то функцию $W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ можно записать как функцию от четырех координат: $W(x_0, y_0, x, y)$.) Другими словами, $W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ — это минимальное время, за которое свет доходит от точки $\mathbf{x}_0$ до точки $\mathbf{x}$. Если принцип Ферма верен буквально, то это просто время, за которое свет доходит от $\mathbf{x}_0$ до $\mathbf{x}$, и оно автоматически минимально. В реальности это утверждение верно, вообще говоря, только если точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$ достаточно близки (и даже в этом случае не всегда). Заметим, что множество $X(\mathbf{x}_0, t)$ можно определить неравенством

$$W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \leq t.$$

Поверхность $\Gamma_t(\mathbf{x}_0)$, заданная равенством $W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = t$ при фиксированном $t$, называется *световым фронтом.* Принцип Гюйгенса часто формулируют для световых фронтов, а не для световых пятен. В этом случае, нужно говорить об огибающей световых фронтов.

Приведем эту формулировку для плоскости. Пусть задано семейство кривых $C_\lambda$ на плоскости, зависящих от одного параметра $\lambda$. Например, такое семейство можно задать параметрически, если кривую $C_\lambda$ записать параметрическим уравнением $x = x(t, \lambda)$, $y = y(t, \lambda)$. Здесь $t$ — это параметр на кривой, а $\lambda$ — это параметр, выделяющий кривую $C_\lambda$ из рассматриваемого семейства (то есть вдоль одной и той же кривой семейства параметр $\lambda$ не меняется). Кривая $C$ называется *огибающей* семейства $C_\lambda$, если она касается всех кривых этого семейства. Теперь мы можем сформулировать принцип Гюйгенса для световых фронтов.

**Теорема 2.** *Предположим, что все световые фронты на плоскости, заполненной данной средой, являются гладкими и выпуклыми. Предположим также, что через любые две точки проходит некоторая световая траектория. Зафиксируем разложение $t = t_1 + t_2$ временного интервала $t$ в сумму двух неотрицательных временных интервалов. Тогда световой фронт $\Gamma_t(\mathbf{x_0})$ является огибающей «вторичных» световых фронтов $\Gamma_{t_2}(\mathbf{x}_1)$, выпущенных из всех точек $\mathbf{x}_1$ светового фронта $\Gamma_{t_1}(\mathbf{x}_0)$.*

*Доказательство.* При сделанном предположении, световое пятно $X(\mathbf{x}_0, t)$ всегда является выпуклой оболочкой светового фронта $\Gamma_t(\mathbf{x}_0)$. Пусть $\mathbf{x}_1$ — произвольная точка светового фронта $\Gamma_{t_1}(\mathbf{x}_0)$.

Заметим, что световой фронт $\Gamma_{t_2}(\mathbf{x}_1)$ имеет общую точку со световым фронтом $\Gamma_t(\mathbf{x_0})$, а именно, точку, в которую световая траектория, соединяющая точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$, доходит из точки $\mathbf{x}_0$ за время $t$ (или, что то же самое, из точки $\mathbf{x}_1$ за время $t_2$). Теперь достаточно воспользоваться следующим утверждением: если одна выпуклая гладкая кривая лежит в выпуклой оболочке другой выпуклой гладкой кривой, и при этом две кривые имеют общую точку, то они касаются в этой точке. Грубо говоря, если бы это было не так, то касательные к двум кривым пересекались бы под ненулевым углом, а отсюда следует, что и сами кривые пересекались бы под ненулевым углом. В этом случае одна кривая не могла бы лежать внутри другой (проведите это рассуждение подробно и строго). □

*Индикатрисой* $I(\mathbf{x}_0)$ (данной сплошной среды) в точке $\mathbf{x}_0$ называется поверхность, образованная концами всех векторов $\vec{v}$, которые могут служить вектором скорости фотона, проходящего через точку $\mathbf{x}_0$. В каждом направлении выходит ровно один такой вектор. Например, если среда изотропна, то индикатриса является шаром. В общем случае мы будем предполагать, что индикатриса является гладкой выпуклой поверхностью. Индикатрису можно понимать как форму бесконечно малого светового фронта. А именно, при некоторых естественных предположениях,

$$I(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\Gamma_t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\right).$$

Множество $(\Gamma_t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0)$ — это световой фронт, сдвинутый (при помощи параллельного переноса) таким образом, чтобы его центр попал в начало координат. Что означает предел семейства множеств, конечно, следовало бы уточнить. Но мы не будем формулировать строго ни самого утверждения, ни тех предположений, при которых оно выполняется. Это достаточно громоздко, а мы все равно сейчас обсуждаем только мотивировки. Ограничимся лишь тем замечанием, что всякая точка левой части может быть получена как предел точек из правой части. В самом деле, любой элемент индикатрисы — это вектор скорости $\vec{v}$ некоторого светового луча. За время $t$, этот луч доходит доходит до некоторой точки $\mathbf{x}(t) \in \Gamma_t(\mathbf{x}_0)$. По определению скорости, имеем

$$\vec{v} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0}{t}.$$

**Теорема 3.** *Рассмотрим световой луч, выходящий из точки* $\mathbf{x}_0$ *и проходящий через точку* $\mathbf{x}$. *Рассмотрим также световой фронт* $\Gamma = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid W(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = t\}$, *проходящий через точку* $\mathbf{x}$. *Пусть*

*$\vec{v}$ — вектор скорости света в точке $\mathbf{x}$, касательный к данному световому лучу. Тогда касательная к индикатрисе $I(\mathbf{x})$ в точке $\vec{v} \in I(\mathbf{x})$ параллельна касательной к световому фронту в точке $\mathbf{x}$.*

Мы обсудим только очень нестрогое рассуждение, помогающее убедиться в том, что это должно быть правдой для большинства хороших (в оптическом смысле) сред. Рассмотрим очень маленький промежуток времени $\Delta t$. Световой фронт $\Gamma_{\Delta t}(\mathbf{x})$ достаточно хорошо приближается множеством $(\Delta t)I(\mathbf{x})+\mathbf{x}$. Мы знаем, что касательная к фронту $\Gamma_{\Delta t}(\mathbf{x})$ в точке светового луча, проходящего через точку $\mathbf{x}$ со скоростью $\vec{v}$, совпадает к касательной к фронту $\Gamma_{t+\Delta t}(\mathbf{x}_0)$ в той же точке (напомним, что точка $\mathbf{x}_0$ — эта та точка, из которой выходит световой фронт $\Gamma = \Gamma_t(\mathbf{x}_0)$). При $\Delta t \to 0$, первая касательная стремится к касательной к индикатрисе $I(\mathbf{x})$ в точке $\vec{v}$, а вторая касательная — к касательной к фронту $\Gamma$ в точке $\mathbf{x}$. Мы не будем давать более формального доказательства сформулированной теоремы (чтобы было формальное доказательство, нужно еще и формулировку уточнить), но интуитивно это должно быть ясно (если не ясно, попробуйте порисовать картинки).

**Теорема 4.** *Предположим, что плоскость заполнена изотропной средой, в которой скалярная скорость света выражается гладкой функцией $v(x,y)$. Тогда скорость светового луча, выходящего из точки $(x_0,y_0)$, в точке $(x,y)$ равна*

$$\vec{v} = v(x,y)^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}\right),$$

*где $W = W(x_0,y_0,x,y)$ (дифференцирование производится при фиксированных $x_0$ и $y_0$).*

Например, если $v(x,y)=1$ во всех точках $(x,y)$, то $W(x_0,y_0,x,y)$ равно длине отрезка, соединяющего точки $(x_0,y_0)$ и $(x,y)$, то есть

$$W(x_0,y_0,x,y) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Положим $f(x,y) = W(0,0,x,y)$. Ясно, что градиент функции $f$ направлен от начала координат и имеет длину 1. Это соответствует тому, что свет, выходящий из начала координат, распространяется по прямолинейным лучам с постоянной скоростью.

*Доказательство теоремы 4.* Заметим, что вектор с координатами $\frac{\partial W}{\partial x}(x_0,y_0,x,y)$ и $\frac{\partial W}{\partial y}(x_0,y_0,x,y)$ — это вектор, перпендикулярный световому фронту в точке $(x,y)$ (имеется в виду световой фронт, выпущенный из точки $(x_0,y_0)$ и проходящий через точку $(x,y)$).

Это вытекает из следующего общего утверждения: вектор $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ перпендикулярен линии уровня функции $f$.

Пусть $\vec{v}$ — вектор скорости света в точке $(x, y)$, направленный вдоль луча, выходящего из $(x_0, y_0)$. Поскольку среда изотропна, все ее индикатрисы являются кругами. В частности, касательная к индикатрисе в точке $\vec{v}$ перпендикулярна вектору $\vec{v}$. Согласно теореме 3, касательная к фронту в точке $(x, y)$ параллельна касательной к индикатрисе в точке $\vec{v}$, то есть перпендикулярна вектору $\vec{v}$. Таким образом, вектор $\vec{v}$ перпендикулярен световому фронту. Как мы уже выяснили, вектор с координатами $\frac{\partial W}{\partial x}(x_0, y_0, x, y)$ и $\frac{\partial W}{\partial y}(x_0, y_0, x, y)$ тоже перпендикулярен световому фронту. Следовательно, эти два вектора пропорциональны.

Осталось найти коэффициент пропорциональности. Для этого достаточно посчитать длину вектора с координатами $\frac{\partial W}{\partial x}(x_0, y_0, x, y)$ и $\frac{\partial W}{\partial y}(x_0, y_0, x, y)$. Это градиент функции $W$, равной времени, которое свет тратит на прохождение от точки $(x_0, y_0)$ до точки $(x, y)$. Таким образом, он приблизительно равен $\Delta t/\Delta s$, где $\Delta s$ — длина малого участка светового луча, а $\Delta t$ — время, за которое фотон проходит этот малый участок (мы уже знаем, что градиент функции $W$ направлен вдоль светового луча, выходящего из точки $(x, y)$ — мы здесь этим пользуемся). С другой стороны, скорость света в точке $(x, y)$ приблизительно равна $\Delta s/\Delta t$. Отсюда можно заключить, что длина вектора $(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y})$ равна $1/v(x, y)$, где $v(x, y)$ — (скалярная) скорость света в точке $(x, y)$.

Длина вектора $\vec{v}$ равна $v(x, y)$. Таким образом, коэффициент пропорциональности равен $v(x, y)^2$. $\square$

Из приведенного доказательства вытекает, что функция $W$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных (называемому *уравнением эйконала*):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v(x, y)^2}.$$

В самом деле, в левой части стоит квадрат длины градиента функции $W$ (рассматриваемой как функция от $x$ и $y$ при фикмированных $x_0$ и $y_0$). Но мы уже выяснили, что длина градиента равна $1/v(x, y)$. Кстати, поэтому градиент функции $W$ иногда называют *нормальной медлительностью светового фронта.*

**Добавления и задачи.**

2.1. **Поиск кратчайшего пути в графе.** Обсудим задачу из совсем другой области, для решения которой оказываются полезными идеи из геометрической оптики. Задача состоит в том, чтобы в данном графе найти кратчайшее расстояние между двумя вершинами. Расстояние между вершинами — это длина кратчайшего пути по ребрам из одной вершины в другую, а длина пути по ребрам — это просто количество пройденных ребер. Задача нахождения кратчайшего пути в графе имеет большое практическое значение. Например, на сайте немецкой железнодорожной компании Deutsche Bahn можно найти, как проехать от одной железнодорожной станции до другой с наименьшим числом пересадок (есть еще оптимизация по времени). При этом система распознает все станции, включая остановки местных электричек и даже остановки городского транспорта в крупных городах, при том не только в Германии, а по всей Европе. Иногда минимальное количество пересадок оказывается равным 7 (например, от остановки голландской электрички до остановки местной электички где-нибудь в Шварцвальде на юге Германии). Чтобы найти маршрут с минимальным количеством пересадок, система решает задачу о кратчайшем пути в графе. В каком именно графе? — упражнение.

Допустим, мы хотим найти кратчайшее расстояние от точки $x$ некоторого графа до другой точки $y$. Пишем в точке $x$ число 0. Во всех соседних точках, в которых еще ничего не написано, пишем 1. Для каждой точки, помеченной числом 1, проводим аналогичную процедуру: во всех соседних точках, в которых еще ничего не написано, пишем 2 и т.д. Рано или поздно, в точке $y$ окажется некоторое число. Это число и есть расстояние от точки $x$ до точки $y$. Очевидна аналогия описанного процесса с процессом распространения светового фронта.

2.2. **Метод Гамильтона нахождения траекторий.** Рассмотрим плоскость, заполненную изотропной (но необязательно однородной) средой. Как обычно, пусть $v(x,y)$ обозначает скорость света в точке $(x,y)$. Предположим, что функция $W(x_0,y_0,x,y)$ известна, а нам хотелось бы найти световые траектории. Гамильтон нашел метод, при помощи которого это можно сделать, и обобщил этот метод на произвольные механические системы (обобщение называется методом Гамильтона–Якоби, и мы его подробно обсудим). Рассмотрим луч света, выходящий из точки $(x_0,y_0)$ и попадающий в точку $(x,y)$. Пусть $\vec{v}_0$ — скорость этого луча в точке $(x_0,y_0)$, а $\vec{v}$ — скорость луча в точке $(x,y)$. Очевидно, имеется и обратный луч, выходящий из точки $(x,y)$ со скоростью $-\vec{v}$ и попадающий в точку $(x_0,y_0)$ со скоростью $-\vec{v}_0$. Мы знаем, что

$$\vec{v} = v(x,y)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} W(x_0,y_0,x,y), \frac{\partial}{\partial y} W(x_0,y_0,x,y) \right),$$

$$-\vec{v}_0 = v(x_0,y_0)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_0} W(x_0,y_0,x,y), \frac{\partial}{\partial y} W(x_0,y_0,x,y) \right).$$

Отсюда следует, что для всех точек $(x,y)$ светового луча, выходящего из $(x_0,y_0)$, производная $\frac{\partial}{\partial x_0} W(x_0,y_0,x,y)$ имеет одно и то же значение. Таким образом, вдоль светового луча, выходящего из $(x_0,y_0)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_0} W(x_0,y_0,x,y) = const.$$

Константа, конечно, зависит от луча, но не зависит от выбора точки на луче. Это уравнение можно использовать для нахождения формы световых лучей,

если известно, чему равна функция $W$. На самом деле, предположение о том, что среда изотропна, нам по существу не нужно.

Рассмотрим некоторую среду, не обязательно изотропную, но такую, для которой определена гладкая функция оптической длины пути $W(x_0, y_0, x, y)$. Пусть $\gamma$ — настоящая световая траектория, соединяющая точки $(x_0, y_0)$ и $(x, y)$. Продолжим траекторию $\gamma$ за пределы точки $(x_0, y_0)$, то есть будем считать, что источник света расположен не в точке $(x_0, y_0)$, а в некоторой другой точке $(x_{-1}, y_{-1})$, так что луч света выходит из точки $(x_{-1}, y_{-1})$ и проходит через точки $(x_0, y_0)$ и $(x, y)$. Пусть $\vec{v}_0 = (a_0, b_0)$ — вектор скорости света в точке $(x_0, y_0)$, касательный к рассматриваемой траектории. Мы хотим доказать, что числа $\frac{\partial W}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial W}{\partial y_0}$) не зависят от выбора точки $(x, y)$. Для этого заметим следующее:

$$W(x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0) + W(x_0, y_0, x, y) = W(x_{-1}, y_{-1}, x, y).$$

Дифференцируя это равенство по $x_0$ и $y_0$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} W(x_0, y_0, x, y) = -\frac{\partial}{\partial x_0} W(x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0).$$

Как видно из этой формулы, правая часть не зависит ни от $x$, ни от $y$.

### 2.3. **Задачи.**

*Задача* 10. Выведите из принципа Ферма, что функция $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет неравенству треугольника

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + W(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

*Задача* 11. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что равенство $(t+s)A = tA + sA$ выполнено при всех неотрицательных действительных значениях $s$ и $t$ тогда и только тогда, когда множество $A$ выпукло.

*Задача* 12. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — подмножество, удовлетворяющее соотношению $A + A = 2A$. Докажите, что если $A$ замкнуто или открыто, то $A$ выпукло.

*Задача* 13. Проверьте, что функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1$$

всюду, кроме начала координат.

*Задача* 14. Пусть $f(x, y)$ равно минимальному расстоянию от точки $(x, y)$ до эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Докажите, что для всех точек во внешности эллипса выполняется уравнение из предыдущей задачи. Найдите еще какие-нибудь решения этого уравнения с частными производными.

*Решение.* Рассмотрим произвольную выпуклую замкнутую кривую $C$. У этой кривой есть внешность и внутренность. Из каждой точки кривой $C$, выпустим луч, перпендикулярный этой кривой. Выпуклость кривой $C$ гарантирует, что все эти лучи не пересекаются. Как посчитать расстояние от точки $(x, y)$ вне кривой $C$ до кривой $C$? Точка $(x, y)$ принадлежит какому-либо лучу $R$. Расстояние от $(x, y)$ до кривой $C$ равно длине отрезка луча $R$ от его начала (которое принадлежит кривой $C$) до точки $(x, y)$. Понятно, что если мы теперь пойдем

вдоль луча $R$, то расстояние до кривой $C$ увеличится ровно на пройденное нами расстояние. По неравенству треугольника, как бы мы ни шли, расстояние до кривой $C$ никогда не может увеличиться больше, чем на пройденное расстояние. Отсюда вытекает, что если $f(x, y)$ — это расстояние от точки $(x, y)$ до кривой $C$, то производная функции $f$ по направлению единичного вектора вдоль луча $R$ равна 1, а производные по направлению всех остальных единичных векторов не больше 1. Иначе говоря, максимальная скорость прирацения функции $f$ (относительно евклидовой длины) равна 1. Но модуль градиента — это как раз максимальная скорость приращения функции. Следовательно, модуль градиента функции $f$ равен 1. Это утверждение можно переписать как следующее дифференциальное уравнение с частными производными на функцию $f$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

□

*Задача* 15. Известно, что для некоторой среды

$$W(x_0, y_0, x, y) = \sqrt[4]{(x - x_0)^4 + (y - y_0)^4}.$$

Найдите форму световых лучей. Найдте индикатрисы. Те же вопросы для $W(x_0, y_0, x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2(y^2 + y_0^2)}$.

## 3. Принцип наименьшего действия

Движение любой механической системы подчиняется вариационному принципу, в чем-то похожему на принцип Ферма. Этот вариационный принцип называется *принципом наименьшего действия* и часто связывается с именем Гамильтона (хотя он был ранее известен Лагранжу). Положение механической системы можно охарактеризовать точкой конфигурационного пространства. Мы сейчас будем предполагать, что конфигурационное пространство совпадает с $\mathbb{R}^n$. При этом случай $n > 3$ является физически осмысленным, поскольку механическая система может состоять более чем из одной точки. Движение системы соответствует движению точки в конфигурационном пространстве, то есть гладкой функции $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$. Пусть фиксированы начальный и конечный момент времени $t_0$ и $t_1$, соответственно. Принцип наименьшего действия утверждает, что траектория $\gamma$ механической системы такова, что интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt$$

по этой траектории (называемый *функционалом действия*) минимален при фиксированных начальном и конечном моментах времени $t_0$ и $t_1$, соответственно, а также при фиксированных начальном

и конечном положениях $q_{(0)} = \gamma(t_0)$, $q_{(1)} = \gamma(t_1)$. Здесь $L$ — некоторая функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, называемая *функцией Лагранжа* (или *лагранжианом*). Минимум ищется среди всех возможных траекторий, то есть среди всех гладких кривых $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, таких, что $q_{(0)} = \gamma(t_0)$, $q_{(1)} = \gamma(t_1)$.

Принцип наименьшего действия нуждается в некоторых уточнениях, аналогичных тем, которые нужно было ввести для принципа Ферма. В частности, следует говорить не о минимуме функционала действия, а о критической точке этого функционала.

Существенным отличием принципа наименьшего действия от принципа Ферма является то, что минимизация интеграла происходит при фиксированных начальном и конечном моментах времени. Впрочем, можно от времени полностью избавиться и сформулировать вариационный принцип, вполне аналогичный принципу Ферма, для нахождения формы траекторий в конфигурационном пространстве. Когда форма траекторий найдена, параметризация находится из закона сохранения энергии. Этот вариационный принцип мы сформулируем позже.

Аргументы функции Лагранжа мы будем обозначать через $q \in \mathbb{R}^n$ и $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$. При этом $q$ имеет смысл положения (набора координат), а $\dot{q}$ имеет смысл скорости. Подчеркнем, что при этом $\dot{q}$ нужно воспринимать как независимый набор переменных, а не как вектор скорости конкретной траектории.

**Теорема 5** (уравнения Эйлера–Лагранжа). *Пусть $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ — достаточно гладкая траектория, минимизирующая функционал действия (мы не обсуждаем сейчас вопрос существования такой траектории). Тогда*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t)\right) = \frac{\partial L}{\partial q}\left(\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t)\right).$$

Если $q$ — это просто число, т.е. $n = 1$, то $\frac{\partial L}{\partial q}$ — это обычная частная производная функции $L$ по $q$. Если же $q$ — набор координат $(q_1, \ldots, q_n)$, то выражение $\frac{\partial L}{\partial q}$ следует воспринимать как набор частных производных $(\frac{\partial L}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial q_n})$, или, лучше, как дифференциал функции $L$ при фиксированных значениях переменных $\dot{q}$ (при фиксированных $q$ и $\dot{q}$ это линейный функционал на пространстве $\mathbb{R}^n$). Левая часть равенства, фигурирующего в утверждении теоремы, получается так. Сначала нужно продифференцировать функцию $L(q, \dot{q})$ по $\dot{q}$, потом подставить $\gamma(t)$ вместо $q$ и $\frac{d}{dt}\gamma(t)$ вместо $\dot{q}$, и, наконец, продифференцировать полученное выражение по $t$

(заметим, что полученное выражение является функцией от одной переменной $t$).

*Доказательство.* Рассмотрим однопараметрическое семейство путей (=параметризованных кривых), соединяющих точки $q_{(0)}$ и $q_{(1)}$ и запараметризованных отрезком $[t_0, t_1]$. Мы будем писать $t \mapsto \gamma(t, s)$ для обозначения пути с параметром $s$. Таким образом, параметр $t$ — это параметр вдоль пути (имеющий физический смысл времени), а $s$ — параметр, отвечающий за вариацию самого пути.

Допустим, что функция $\gamma(t, s)$ достаточное число раз дифференцируема как функция двух переменных. Дифференцирование по $t$ будем обозначать точкой, а дифференцирование по $s$ символом $\delta$. Имеем

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t,s), \dot\gamma(t,s))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta\gamma + \frac{\partial L}{\partial \dot q} \delta\dot\gamma \right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta\gamma - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right) \delta\gamma \right) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot q} \cdot \delta\gamma \,\Big|_{t_0}^{t_1} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right) \right) \delta\gamma \, dt.$$

Первое равенство выполняется для такого параметра $s$, для которого функционал действия на траектории $t \mapsto \gamma(t, s)$ принимает минимальное значение (мы можем, например, считать, что это минимальное значение достигается при $s = 0$). Равенство следует из того, что производная дифференцируемой функции в точке минимума должна быть равна нулю. Второе равенство — это дифференцирование под знаком интеграла. Произведение $\frac{\partial L}{\partial q}\delta q$, например, обозначает значение линейного функционала $\frac{\partial L}{\partial q}$ на векторе $\delta q$. В координатах это значение записывается как

$$\frac{\partial L}{\partial q}\delta q = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Третье равенство — интегрирование по частям. В четвертом равенстве используется то, что $\gamma(s, t_0) = q_{(0)}$ не зависит от $s$, и что $\gamma(s, t_1) = q_{(1)}$ тоже независит от $s$, а значит, $\delta\gamma = 0$ при $t = t_0$ и при $t = t_1$.

Наконец, заметим, что если $t \mapsto \gamma(t)$ — это достаточно гладкая траектория, минимизирующая функционал действия, а $t \mapsto \alpha(t)$ — любое достаточно гладкое отображение из $[t_0, t_1]$ в $\mathbb{R}^n$, такое, что $\alpha(t_0) = \alpha(t_1) = 0$, то можно рассмотреть семейство траекторий

$$\gamma(t, s) = \gamma(t) + s\alpha(t),$$

для которого $\delta\gamma = \alpha$ при $s = 0$. Таким образом, мы доказали, что интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \alpha \, dt$$

равен нулю для любого достаточно гладкого отображения $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, принимающего нулевые значения на концах отрезка $[t_0, t_1]$. Отсюда следует, что подынтегральное выражение тождественно равно нулю, то есть

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0,$$

если вместо $q$ и $\dot{q}$ (еще до того, как дифференцировать по $t$) подставить $\gamma(t)$ и $\dot{\gamma}(t)$. $\square$

При доказательстве теоремы мы использовали следующую лемму:

**Лемма 6.** *Пусть $F : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n*}$ — непрерывное отображение. Если для любого достаточно гладкого отображения $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, такого, что $\alpha(t_0) = \alpha(t_1) = 0$, выполнено равенство*

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)\alpha(t)dt = 0,$$

*то $F$ тождественно равно нулю. Здесь $F(t)\alpha(t)$ — это результат канонического спаривания между ковектором $F(t)$ и вектором $\alpha(t)$.*

Доказательство леммы несложно и предоставляется читателю.

Пусть $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ — гладкая траектория, которая минимизирует функционал действия среди всех траекторий, подчиняющихся условиям $\gamma(t_0) = q_{(0)}$, $\gamma(t_1) = q_{(1)}$. Будем называть такую траекторию *оптимальной*. Принцип наименьшего действия в том виде, в каком он сформулирован выше, говорит о том, что механическая система всегда движется по оптимальной траектории. Однако, в реальности это не всегда так. *Истинной траекторией* называется траектория, удовлетворяющая уравнениям Эйлера–Лагранжа. Механические системы могут двигаться по истинным, но не обязательно оптимальным траекториям. Уточненный принцип наименьшего действия гласит: движение механической системы подчиняется уравнениям Эйлера–Лагранжа, то есть представляет собой истинную траекторию.

*Пример* 2. Допустим, что лагранжиан механической системы не зависит от координат, а зависит только от скоростей (этот случай аналогичен рассмотрению оптических свойств однородной, но неизотропной среды). В этом случае, лагранжиан имеет вид $T(\dot{q})$. Мы предположим, что отображение $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (то есть первый дифференциал функции $T$; формально говоря, это отображение из пространства $\mathbb{R}^n$ в двойственное пространство $\mathbb{R}^{n*}$) обратимо. Уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Это значит, что $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ постоянно вдоль истинных траекторий, то есть для любой истинной траектории $\gamma$, имеем $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(\dot{\gamma}(t)) = const$. Отсюда и из обратимости отображения $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ вытекает, что $\dot{\gamma}(t)$ не зависит от $t$, то есть истинное движение равномерное и прямолинейное.

*Пример* 3. Пусть $L(q, \dot{q})$ — квадратичная форма от $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, коэффициенты которой зависят от $q \in \mathbb{R}^n$ (достаточно гладко). По теореме Эйлера об однородных функциях,

$$\dot{q} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 2L.$$

Вместо $q$ и $\dot{q}$ подставим $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ — положение и скорость в момент времени $t$ при движении вдоль истинной траектории. Теперь продифференцируем обе части равенства по $t$:

$$\ddot{q}(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q}(t) \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \dot{q}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q}(t) + \frac{dL}{dt}.$$

Мы здесь сделали хитро: в правой части стояло $2L$, мы одно $L$ продифференцировали по правилу дифференцирования сложной функции, а у другого $L$ оставили полную производную по времени. Пользуясь уравениями Эйлера–Лагранжа и уничтожая одинаковые члены из правой и левой частей, получаем $\frac{d}{dt}L = 0$. Это означает, что величина $L(q(t), \dot{q}(t))$ постоянна вдоль истинных траекторий, то есть не зависит от времени. По определению, это означает, что функция $L(q, \dot{q})$ является *первым интегралом* уравнений Эйлера–Лагранжа, или, как еще говорят, первым интегралом движения с лагранжианом $L$.

Можно считать, что $L(q, \dot{q})$ — это энергия точки, движущейся свободно со скоростью $\dot{q}$ в искривленном пространстве. То, что энергия зависит от $q$, связано с искривлением пространства. Однако важен тот факт, что кинетическая энергия зависит квадратично

от скорости. Свободное движение характеризуется отсутствием потенциальной энергии. В плоском (неискривленном) пространстве кинетическая энергия частицы имеет вид

$$L(q,\dot q)=\frac{m|\dot q|^2}{2},$$

где $m>0$ — это масса частицы. Можно всегда считать, что масса равна единице. Число $|\dot q|$ — это длина модуля скорости, измеренная относительно стандартной евклидовой метрики.

Допустим теперь, что для каждого $q\in\mathbb{R}^n$, квадратичная форма $\dot q\mapsto L(q,\dot q)$ обладает следующим свойством: $L(q,\dot q)>0$ для всех ненулевых векторов $\dot q$. Тогда $L(q,\dot q)$ является квадратом модуля вектора $\dot q$ относительно некоторой евклидовой метрики. Но только эта евклидова метрика зависит от точки $q$. Такие метрики (евклидовы метрики, зависящие от точки) называют *римановыми метриками*. Таким образом, наш лагранжиан является римановой метрикой. В смысле этой метрики, квадрат длины вектора $\dot q$, отложенного от точки $q$, равен $L(q,\dot q)$. Нетрудно посчитать длину кривой $\gamma:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$ в метрике $L$:

$$Length(\gamma)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{L(\gamma(t),\dot\gamma(t))}\,dt.$$

Таким оборазом, длина кривой тоже имеет вид действия, но это действие посчитано не для лагранжиана $L$, а для лагранжиана $\sqrt{L}$. Оптимальные кривые для лагранжиана $\sqrt{L}$ называются *кратчайшими*. Это кривые кратчайшей длины среди всех гладких кривых, соединяющих данную пару точек (концы кратчайшей).

Заметим, что длина кривой не зависит от того, как эта кривая запараметризована. В частности, если $\gamma:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$ является кратчайшей, то кратчайшей будет также любая другая кривая, полученная из $\gamma$ заменой параметра, то есть кривая вида $\tilde\gamma:[s_0,s_1]\to\mathbb{R}^n$, где $\tilde\gamma(s)=\gamma(h(s))$ для некоторого гомеоморфизма $h:[s_0,s_1]\to[t_0,t_1]$. Однако на кратчайшей кривой $\gamma$ есть естественный параметр, относительно которого скорость постоянна, то есть $L(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ не зависит от $t$. Истинные траектории лагранжиана $L$ называются *геодезическими* римановой метрики $L$.

**Теорема 7.** *Пусть $L$ — риманова метрика. Геодезические римановой метрики $L$ являются также истинными траекториями лагранджиана $\sqrt{L}$. Обратно, если истинная траектория лагранжиана $\sqrt{L}$ (например, кратчайшая) обладает тем свойством, что $L=const$ вдоль этой траектории (то есть при подстановке*

*истинных координат и скоростей вместо аргументов функции $L$ получается величина, не зависящая от времени), то эта траектория является также геодезической римановой метрики $L$.*

*Доказательство.* Имеем:

$$\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial\sqrt{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

Рассмотрим геодезическую римановой метрики $L$, то есть истинную траекторию лагранжиана $L$. Как мы знаем, вдоль этой траектории $L$ не зависит от времени. Мы должны проверить, что рассматриваемая траектория удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа для лагранжиана $\sqrt{L}$, то есть $\frac{d}{dt}\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\sqrt{L}}{\partial q}$. Левая часть этого равенства равна $\frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}$, поскольку $L = const$ относительно $t$. Правая часть равенства равна $\frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial q}$. Таким образом, уравнения Эйлера–Лагранжа для лагранжиана $\sqrt{L}$ вытекают из уравнений Эйлера–Лагранжа для лагранжиана $L$.

Доказательство обратного утверждения аналогично. □

Таким образом, всякая кратчайшая допускает параметризацию, в которой она становится геодезической. Однако не всякая геодезическая является кратчайшей. Например, геодезические на сфере совпадают с дугами больших окружностей (то есть с дугами окружностей, высекаемых на сфере плоскостями, проходящими через центр сферы). Однако дуга большой окружности является кратчайшей только в том случае, если ее длина меньше половины длины окружности.

## Добавления и задачи.

3.1. **Геодезические римановой метрики на плоскости.** На плоскости с координатами $(x, y)$, рассмотрим лагранжиан следующего вида

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = E\dot{x}^2 + 2F\dot{x}\dot{y} + G\dot{y}^2,$$

где $E$, $F$ и $G$ — гладкие функции от $x$ и $y$ (обозначения для этих функций стандартные, они восходят к Гауссу). Предположим, что в каждой точке,

$$E > 0, \quad \Delta = EG - F^2 < 0.$$

Это условие эквиваелнтно тому, что квадратичная форма

$$Q(\xi, \eta) = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2$$

положительно определена при любых значениях $x$ и $y$, то есть принимает строго положительные значения на всех векторах $(\xi, \eta)$, кроме нулевого. Следовательно, лагранжиан $L$ является римановой метрикой на плоскости. Обратно, всякая риманова метрика на плоскости (или на плоской области) имеет такой вид.

Мы знаем, что геодезические метрики $L$ (относительно любого параметра) являются траекториями лагранжиана $\sqrt{L}$. Имеем:

$$\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial y} = \frac{E_y\dot{x}^2 + 2F_y\dot{x}\dot{y} + G_y\dot{y}^2}{2\sqrt{E\dot{x}^2 + 2F\dot{x}\dot{y} + G\dot{y}^2}}.$$

$$\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{F\dot{x} + G\dot{y}}{\sqrt{E\dot{x}^2 + 2F\dot{x}\dot{y} + G\dot{y}^2}}.$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\alpha\dot{x}^4 + \beta\dot{x}^3\dot{y} + \gamma\dot{x}^2\dot{y}^2 + \delta\dot{x}\dot{y}^3 + \varepsilon\dot{y}^4 + 2\Delta(\dot{x}^2\ddot{y} - \dot{x}\dot{y}\ddot{x})}{2\left(E\dot{x}^2 + 2F\dot{x}\dot{y} + G\dot{y}^2\right)^{3/2}}$$

где

$$\alpha = 2EF_x - FE_x, \quad \beta = 2FF_x + 2EF_y + 2EG_x - GE_x - FE_y,$$
$$\gamma = 2FF_y + 3FG_x + 2EG_y - GE_y, \quad \delta = GG_x + 3FG_y, \quad \varepsilon = GG_y.$$

Выберем в качестве локального параметра координату $x$ (так можно сделать не для всех, но для большинства геодезических). Другими словами, положим $t = x$. Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ перепишется в виде

$$\frac{E_y + 2F_y y' + G_y y'^2}{2\sqrt{E + 2Fy' + Gy'^2}} = \frac{\alpha + \beta y' + \gamma y'^2 + \delta y'^3 + \varepsilon y'^4 + 2\Delta y''}{2\left(E + 2Fy' + Gy'^2\right)^{3/2}}$$

Мы можем выразить $y''$ из этого уравнения:

$$y'' = \frac{1}{2\Delta}\left((E_y + 2F_y y' + G_y y'^2)(E + 2Fy' + Gy'^2) - \alpha - \beta y' - \gamma y'^2 - \delta y'^3 - \varepsilon y'^4\right)$$

Приводя подобные, получаем следующее дифференциальное уравнение геодезических:

$$y'' = \frac{1}{2\Delta}\left(a_0 + a_1 y' + a_2 y'^2 + a_3 y'^3\right),$$

в котором

$$a_0 = EE_y - 2EF_x + FE_x, \quad a_1 = 3FE_y - 2FF_x - 2EG_x + GE_x,$$
$$a_2 = 2GE_y + 2FF_y - EG_y - 3FG_x, \quad a_3 = 2GF_y - FG_y - GG_x.$$

3.2. **Задача Бельтрами.** Итальянский геометр Е. Бельтрами решил следующую задачу: найти все метрики на плоскости (или в открытой области на плоскости), в которых все геодезические — прямые (или отрезки прямых). На самом деле, задача локальная, и достаточно ограничиться маленькой открытой окрестностью на плоскости. Задача пришла из картографии — Бельтрами интересовался тем, как именно можно картографировать земную поверхность, чтобы кратчайшие линии на поверхности изображались отрезками прямых (на таких картах очень удобно прокладывать оптимальные маршруты). Если все геодезические — отрезки прямых, то в выписанном выше уравнении для геодезических $y'' = 0$. Поскольку наклон геодезической в произвольной точке может быть произвольным, нам нужно приравнять к нулю коэффициенты при всех степенях $y'$. Получаем следующую систему уравнений с частными производными на 3 неизвестные функции $E$, $F$ и $G$:

$$\begin{aligned} EE_y - 2EF_x + FE_x &= 0 \\ 3FE_y - 2FF_x - 2EG_x + GE_x &= 0 \\ 2GE_y + 2FF_y - EG_y - 3FG_x &= 0 \\ 2GF_y - FG_y - GG_x &= 0 \end{aligned}$$

Поскольку у нас есть 4 уравнения, мы можем исключить из них 3 производные $E_y$, $F_y$, $G_y$. Получим

$$(-3F^2 + EG)E_x + 4EFF_x - 2E^2G_x = 0.$$

Требуется некоторый перебор, чтобы сообразить, на что нужно умножить это выражение, чтобы получилась производная по $x$. Оказывается, если это выражение разделить на $-2E^{5/2}$, то получится производная по $x$ от

$$\frac{G}{E^{1/2}} - \frac{F^2}{E^{3/2}} = \frac{\Delta}{E^{3/2}}.$$

Следовательно, выражение $\Delta/E^{3/2}$ не зависит от $x$. Аналогично (все, что мы делаем, инвариантно относительно одновременной замены $x$ на $y$ и $E$ на $G$), выражение $\Delta/G^{3/2}$ не зависит от $y$. Поворачивая координатную сетку и используя это же утверждение для новой системы координат, можно сделать вывод о том, что выражение

$$\frac{\Delta}{(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2)^{3/2}}$$

постоянно вдоль любой прямой, параллельной вектору с координатами $(\xi, \eta)$. Иначе говоря, функция

$$I(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\Delta(x, y)}{(E(x, y)\dot{x}^2 + 2F(x, y)\dot{x}\dot{y} + G(x, y)\dot{y}^2)^{3/2}}$$

является первым интегралом системы $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, то есть первым интегралом движения свободной материальной точки. Это ключевое соображение. Мы это соображение сможем развить позже, когда будем подробно обсуждать гамильтоновы системы и их первые интегралы.

3.3. **Мыльные пленки.** Рассмотрим мыльную пленку, натянутую на некоторый контур. Предположим, что пленка однозначно проецируется на некоторую область $D$ на плоскости $xy$. Таким образом, форма пленки совпадает с графиком некоторой функции $u(x, y)$. Мы напишем уравнение с частными производными на функцию $u$.

Как известно, мыльная пленка минимизирует площадь поверхности. Площадь пленки выражается следующим интегралом:

$$\iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx \wedge dy.$$

Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно посчитать площадь маленького параллелограмма со сторонами $(dx, 0, u_x\, dx)$ и $(0, dy, u_y\, dy)$ (стороны мы представляем трехмерными векторами). Этот параллелограмм приближает участок пленки над прямоугольником на плоскости $xy$ со сторонами, представленными двумерными векторами $(dx, 0)$ и $(0, dy)$. Площадь параллелограмма с данными сторонами можно посчитать как модуль векторного произведения:

$$dS = \det \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \end{vmatrix} dx\, dy = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy.$$

Здесь $e_x$, $e_y$ и $e_z$ — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей. Таким образом, площадь выражается как интеграл по области $D$ от функции $\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$.

Рассмотрим более общую задачу минимизации интеграла

$$\iint_D L(u, u_x, u_y)\, dx \wedge dy,$$

где $L$ — некоторая гладкая функция от трех переменных, а $u$ — неизвестная функция, определенная на замыкании области $D$ и такая, что ограничение функции $u$ на границу области $D$ совпадает с заданной функцией (это граничное условие соответствует тому, что граница пленки закреплена на некотором контуре). Мы будем предполагать, что $D$ имеет гладкую границу.

Мы теперь выведем дифференциальное уравнение на оптимальную функцию $u$, аналогичное уравнению Эйлера–Лагранжа. Рассмотрим семейство функций

$$u^t = u + tv,$$

где $v$ — произвольным образом выбранная гладкая функция на $\overline{D}$.

Допустим, что $u$ минимизирует интеграл от $L(u, u_x, u_y)$ по области $D$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \iint_D L(u^t, u^t_x, u^t_y)\, dx \wedge dy\, |_{t=0} = 0.$$

С другой стороны, мы можем продифференцировать под знаком интеграла, то есть

$$\iint_D \left( \frac{\partial L}{\partial u} v + \frac{\partial L}{\partial u_x} v_x + \frac{\partial L}{\partial u_y} v_y \right) dx \wedge dy = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = v \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} dy - \frac{\partial L}{\partial u_y} dx \right).$$

Дифференциаль этой формы равен

$$d\omega = \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} v_x + \frac{\partial L}{\partial u_y} v_y + v \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) \right) dx \wedge dy.$$

По теореме Стокса, интеграл от формы $d\omega$ по оболасти $D$ равен нулю (поскольку форма $\omega$ обращается в 0 на границе области $D$). Следовательно, форму $d\omega$ можно прибавить к подынтегральному выражению, и при этом интеграл (по области $D$) не изменится. Отнимем форму $d\omega$ от подынтегрального выражения в равенстве (1). Получим следующее равенство:

$$\iint_D \left( \frac{\partial L}{\partial u} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) \right) v\, dx \wedge dy = 0.$$

Поскольку интеграл обращается в 0 при любом выборе достаточно гладкой функции $v$, подынтегральное выражение обязано быть тождественно равным нулю. Следовательно, получаем такое уравнение:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial u_y}.$$

Это аналог уравнений Эйлера–Лагранжа для функций двух переменных. Вернемся к нашему примеру: $L = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$. Для такого лагранжиана, уравнение Эйлера–Лагнранжа записывается следующим образом:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{xx} u_y^2 + u_{yy} u_x^2 - 2 u_x u_y u_{xy} = 0.$$

Это нелинейное уравнение. Мы будем называть это уравнение *уравнением мыльной пленки*. Если считать, что $u_x$ и $u_y$ малы, то это уравнение приближается уравнением Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

### 3.4. **Задачи.**

*Задача* 16. Напишите систему дифференциальных уравнений в полярных координатах, которой удовлетворяют все прямые. Точнее, пусть $x(t)$, $y(t)$ координаты точки на прямой, то есть $x(t) = a + bt$, $y(t) = c + dt$ для некоторых констант $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$, таких, что $b^2 + d^2 \neq 0$. Обозначим через $r(t)$, $\phi(t)$ соответствующие полярные координаты. Напишите дифференциальные уравнения на функции $r(t)$, $\phi(t)$.

*Решение.* В декартовых координатах, дифференциальные уравнения прямой имеют вид

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0.$$

Это уравнения Эйлера–Лагранжа для такого лагранжиана:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2.$$

Запишем этот же лагранжиан в полярных координатах:

$$L = (r\dot{\phi})^2 + (\dot{r})^2.$$

Теперь осталось выписать уравнения Эйлера–Лагранжа для нового лагранжиана. Несложные вычисления дают такой результат:

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2, \quad \ddot{\phi} = -\frac{\dot{r}\dot{\phi}}{r}.$$

□

*Задача* 17. Найдите закон движения частицы с лагранжианом

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{2} + y.$$

*Задача* 18. Рассмотрим лагранжиан, определенный в верхней полуплоскости формулой

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{y^2}$$

Докажите, что истинные траектории — это полуокружности с центром на горизонтальной оси.

*Задача* 19. Докажите, что истинные траектории лагранжиана

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

являются подмножествами алгебраических кривых степени 2.

*Задача* 20. Материальная точка скользит по сфере без трения. Напишите ее лагранжиан в сферических координатах.

*Задача* 21. Выпишите уравнения геодезических на параболоиде вращения $z = x^2 + y^2$.

*Задача* 22. Докажите, что для любых положительных $R$ и $a$, геодезическими римановой метрики

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = R^2 \frac{(a^2 + x^2)\dot{y}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y} + (a^2 + y^2)\dot{x}^2}{(a^2 + x^2 + y^2)^2}$$

являются прямые.

## 4. Преобразование Лежандра и гамильтониан

Рассмотрим сначала достаточное число раз дифференцируемую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ от одной действительной переменной. График функции $f$ можно восстановить, зная все касательные прямые к этому графику. Идея преобразования Лежандра состоит в переходе от функции $f$ к семейству всех касательных к графику функции $f$. Предположим, что функция $f$ *строго выпукла*, то есть производная $f'$ строго возрастает. Тогда, для каждого $p \in \mathbb{R}$, существует не более одной касательной к графику функции $f$, тангенс угла наклона которой по отношению к положительному направлению оси $x$ равен $p$. Запишем уравнение этой касательной как $y = px - g(p)$. Здесь $g(p)$ — это просто константа при всяком фиксированном $p$. Однако эта константа, вообще говоря, зависит от $p$. Таким образом, функция $g(p)$ задает семейство прямых на плоскости, ни одна из которых не является вертикальной (в данном случае, это семейство всех касательных прямых к графику функции $f$). Функция $g$ называется *преобразованием Лежандра* функции $f$, и часто обозначается через $\hat{f}$. Преобразованием Лежандра также называют сам переход от функции $f$ к функции $\hat{f}$.

Преобразование Лежандра является частным случаем более общей конструкции, которая осуществляет переход от, скажем, кривой на плоскости к семейству всех касательных этой кривой. Эта конструкция чрезвычайно полезна в алгебраической геометрии (а таже в некоторых разделах математической физики), и называется *проективной двойственностью*.

Очень часто пользуются другим определением преобразования Лежандра, которое мы сейчас тоже дадим. Заметим, что график функции $f$ всегда лежит выше касательной. Этот факт можно переписать в виде неравенства $f(x) \geq px - \hat{f}(p)$, в котором равенство достигается в единственной точке $x(p)$ — точке касания. Эквивалентное неравенство такое:

$$\hat{f}(p) \geq px - f(x).$$

Это неравенство тоже обращается в равенство в единственной точке $x(p)$. Поэтому функцию $\hat{f}(p)$ можно определить также следующей формулой:

$$\hat{f}(p) = \min(px - f(x)).$$

Посчитаем производную преобразования Лежандра:

$$\frac{d}{dp}\hat{f}(p) = \frac{d}{dp}\left(px(p) - f(x(p))\right) = x(p) + p\frac{dx(p)}{dp} - f'(x(p))\frac{dx(p)}{dp}$$

Заметим, однако, что $f'(x(p)) = p$ (производная функции совпадает с тангенсом угла наклона касательной). Следовательно, приведенное выше вычисление показывает, что $\frac{df(p)}{dp} = x(p)$, то есть производная преобразования Лежандра в точке $p$ совпадает с абсциссой точки касания графика функции $f$ с касательной прямой, тангенс угла наклона которой равен $p$.

Преобразование Лежандра определено также для функций многих переменных. Рассмотрим открытое выпуклое подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и достаточно гладкую функцию $f : U \to \mathbb{R}$. Мы скажем, что функция $f$ *строго выпукла*, если для любых двух точек $a, b \in \mathbb{R}^n$ весь отрезок с концами в $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ лежит выше графика функции $f$, за исключением концов. Первый дифференциал $d_{\mathbf{x}}f$ функции $f$ в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — это линейный функционал на $\mathbb{R}^n$, то есть элемент пространства $\mathbb{R}^{n*}$. Обозначим через $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^{n*}$ множество всех линейных функционалов вида $d_{\mathbf{x}}f$, где $\mathbf{x} \in U$. Для каждого элемента $p \in \hat{U}$ найдется единственная касательная гиперплоскость к графику функции $f$, имеющая вид $y = p \cdot \mathbf{x} - g(p)$. В этой формуле произведение $p \cdot \mathbf{x}$ обозначает результат применения линейного функционала $p$ к вектору $\mathbf{x}$. В координатах, если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$, то $p \cdot \mathbf{x} = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n$. Функция $g : \hat{U} \to \mathbb{R}$ называется *преобразованием Лежандра* функции $f$ и часто обозначается через $\hat{f}$. Эквивалентное определение преобразования Лежандра состоит в том, что

$$\hat{f}(p) = \min\left(p \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x})\right).$$

Минимум достигается в единственной точке $\mathbf{x}(p)$. Таким образом,

$$\hat{f}(p) = p \cdot \mathbf{x}(p) - f(\mathbf{x}(p)).$$

Кроме того, совершенно аналогично случаю функций одной переменной получаем, что первый дифференциал функции $\hat{f}$ в точке $p \in \mathbb{R}^{n*}$ совпадает с вектором $\mathbf{x}(p)$ (при естественном отождествлении пространства, двойственного к $\mathbb{R}^{n*}$, с пространством $\mathbb{R}^n$).

Рассмотрим теперь функцию Лагранжа $L(q, \dot{q})$ некоторой механической системы. Предположим, что при любом фиксированном

значении переменных $q$, эта функция является строго выпуклой функцией переменных $\dot{q}$. Обозначим через $H(q,p)$ преобразование Лежандра этой функции (как функции от $\dot{q}$ при фиксированном $q$). Функция $H(q,p)$ называется *функцией Гамильтона*, или *гамильтонианом*. По определению преобразования Лежандра, гамильтониан выражается формулой

$$H(p,q) = p \cdot \dot{q} - L(q,\dot{q}),$$

в которой значения $\dot{q}$ выражаются через значения $p$ по формуле $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ (в силу строгой выпуклости, это уравнение всегда однозначно разрешимо относительно $\dot{q}$). Функция Гамильтона определена на некоторой части пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$. Часто мы будем предполагать, что она определена на всем пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$.

Пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$ называется *фазовым пространством*. Рассмотрим истинную траекторию $q(t)$ в *конфигурационном пространстве* $\mathbb{R}^n$. Она определяет *фазовую траекторию* $(q(t),p(t))$ в фазовом пространстве, в которой $p(t)$ определяется как $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t))$. Величина $p(t)$ называется *импульсом* системы в момент времени $t$.

**Теорема 8** (уравения Гамильтона). *Пусть $q(t)$, $p(t)$ — положение и импульс системы в момент времени $t$ (разумеется, мы предполагаем, что система движется по истинной траектории). Тогда*

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t),p(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t),p(t)).$$

*Доказательство.* Первое равенство вытекает из формулы для первого дифференциала преобразования Лежандра. Заметим, что это равенство никак не использует уравнения Эйлера–Лагранжа. Оно в конечном счете просто сводится к определению импульса системы.

Рассмотрим равенство

$$H(q,p) = p \cdot \dot{q}(p) - L(q,\dot{q}(p)),$$

в котором $\dot{q}(p)$ находится из формулы $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q}(p))$, или, более явно, из формулы $\dot{q}(p) = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p)$. Продифференцируем это равенство по $q$:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q}(p)).$$

Теперь воспользуемся уравениями Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot{q}(p(t))) = -\frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot{q}(t)) = -\frac{d}{dt}p(t).$$

Мы здесь должны вспомнить, что $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t))$. $\square$

Систему уравнений Гамильтона называют еще иногда системой *канонических уравнений.*

**Теорема 9** (закон сохранения энергии). *Пусть $q(t)$ и $p(t)$ — положение и импульс системы в момент времени $t$. Тогда $H(q(t), p(t))$ не зависит от $t$ (другими словами, механическая энергия сохраняется).*

*Доказательство.* Действительно, продифференцируем функцию $H(q(t), p(t))$ по $t$:

$$\frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} =$$
$$= \frac{\partial H}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0.$$

Во втором равенстве мы воспользовались каноническими уравнениями Гамильтона. □

Можно рассматривать гамильтонианы, зависящие явно от времени. Для таких гамильтонианов, закон сохранения энергии не имеет места. Он заменяется формулой $\frac{d}{dt}H(x(t), p(t), t) = \frac{\partial H}{\partial t}(x(t), p(t), t)$. В правой части имеется в виду дифференцирование только по третьему аргументу $t$.

В большинстве задач классической механики, лагранжиан имеет вид

$$L(q, \dot{q}) = T_q(\dot{q}) - U(q),$$

в котором $T_q(\dot{q})$ является положительно определенной квадратичной формой от $\dot{q}$, коэффициенты которой гладко зависят от $q$ (то есть римановой метрикой на конфигурационном пространстве), а функция $U(q)$ не зависит от $\dot{q}$, то есть является просто функцией на конфигурационном пространстве. Физический смысл функций $T_q(\dot{q})$ и $U(q)$ состоит в том, что первая из них совпадает с кинетической энергией системы, а вторая — с потенциальной энергией системы. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H(q, p) = T_q(\dot{q}(p)) + U(q).$$

## Добавления и задачи.

4.1. **Двойственные квадратичные формы.** Пусть $V$ — конечномерное вещественное векторное пространство, а $T : V \to \mathbb{R}$ — положительно определенная квадратичная форма на $V$. Частным случаем преобразования Лежандра является понятие двойственной квадратичной формы на двойственном пространстве $V^*$. Заметим прежде всего, что квадратичная форма $T(\mathbf{x})$ задает некоторое билинейную форму $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называемую *поляризацией формы* $T$ (несколько злоупотребляя обозначениями, мы обе формы обозначаем одной и

той же буквой; разница проявляется лишь в количестве аргументов). Поляризация квадратичной формы однозначно определяется следующими двумя свойствами:

(1) форма $T(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *симметрична*, то есть $T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = T(\mathbf{y},\mathbf{x})$;
(2) имеем $T(\mathbf{x},\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})$.

Предположим, что у нас есть калькулятор, который может складывать действительные числа и умножать действительные числа на некоторые фиксированные множители (скажем, на $\pm\frac{1}{2}$). Как на таком калькуляторе посчитать произведение двух произвольных действительных чисел? Ключом к решению этой задачи служит формула

$$xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}.$$

Аналогичной формулой можно определить поляризацию любой квадратичной формы:

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})}{2}.$$

Билинейная форма $T(\mathbf{x},\mathbf{y})$ задает линейное отображение $I_T : V \to V^*$, переводящее произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ в линейный функционал $\mathbf{y} \mapsto T(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Если квадратичная форма $T$ является положительно определенной (или, более общим образом, невырожденной), это линейное отображение является изоморфизмом между пространством $V$ и двойственным пространством $V^*$. Этот несложный факт доказывается в стандартных курсах линейной алгебры.

*Двойственная квадратичная форма* $T^*(p)$ определяется как $T(I_T^{-1}(p))$. Докажем, что преобразование Лежандра формы $T$ совпадает с $T^*/4$. Преобразование Лежандра определяется формулой

$$\hat{T}(p) = p \cdot \mathbf{x}(p) - T(\mathbf{x}(p)),$$

где точка $\mathbf{x}(p)$ находится из формулы $p = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(p))$. Заметим, что по правилу Лейбница, производная $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}$ совпадает с линейным функционалом $\mathbf{y} \mapsto 2T(\mathbf{x},\mathbf{y})$, то есть с функционалом $2I_T(\mathbf{x})$. Следовательно, $\mathbf{x}(p) = I_T^{-1}(p/2)$. Подставляя это значение в формулу для преобразования Лежандра, получаем

$$\hat{T}(p) = p \cdot I_T^{-1}(p/2) - T^*(p/2).$$

Заметим теперь, что, по определению, $p \cdot (I_T^{-1}(p)) = T(I_T^{-1}(p)) = T^*(p)$. Следовательно, $\hat{T}(p) = T^*(p)/2 - T^*(p)/4 = T^*(p)/4$.

Как уже упоминалось, в большинстве задач классической механики лагранжиан имеет вид

$$L(q,\dot{q}) = T_q(\dot{q}) - U(q),$$

где $T_q(\dot{q})$ — положительно определенная квадратичная форма от $\dot{q}$, гладко зависящая от $q$. Тогда соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H(q,p) = \frac{T_q^*(p)}{4} + U(q),$$

где $T_q^*$ — это двойственная квадратичная форма к форме $T_q$.

4.2. **Проективная двойственность.** Преобразование Лежандра является частным случаем проективной двойственности. Напомним, что вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как множество всех прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащих начало координат. Прямые в $\mathbb{R}P^n$ отождествляются с плоскостями в $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащими начало координат. Двойственное проективное пространство $\mathbb{R}P^{n*}$ определяется как множество прямых в $\mathbb{R}^{(n+1)*}$, содержащих начало координат. Оно естественным образом отождествляется с множеством всех гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через 0.

Мы сейчас ограничимся случаем $n = 1$. Про прямые в $\mathbb{R}P^2$ можно думать как про точки пространства $\mathbb{R}P^{2*}$. Пусть $C \subset \mathbb{R}P^2$ — некоторая гладкая кривая. Рассмотрим множество $\hat{C}$ всех касательных к кривой $C$. Это подмножество двойственной проективной плоскости $\mathbb{R}P^{2*}$. Более того, $\hat{C}$ тоже является кривой (вообще говоря, не обязательно гладкой). Эта кривая называется *двойственной кривой* к кривой $C$. Проективная плоскость, двойственная к $\mathbb{R}P^{2*}$, естественным образом отождествляется с $\mathbb{R}P^2$. Можно рассмотреть двойственную кривую к кривой $\hat{C}$. Сторого говоря, кривая $\hat{C}$ может не быть гладкой, т.е. может иметь особенности, но понятие двойственной кривой нетрудно обобщить на кусочно гладкие кривые с конечным числом простейших особенностей. Тогда кривая, двойственная к кривой $\hat{C}$, совпадает с $C$. Именно поэтому описанное соответствие и называется двойственностью. Доказательство сформулированного утверждения оставляется читателю как (нетривиальное) упражнение.

Проективная двойственность определена и для комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^n$. Она активно используется в комплексной алгебраической геометрии. Оказывается, что множества, двойственные проективным алгебраическим многообразиям, снова являются проективными алгебраическими многообразиями. Например, для плоской комплексной алгебраической кривой, зная ее род, степень, число точек самоперемесения, число двойных касательных, число точек возврата и число точек перегиба, можно найти соответствующие характеристики двойственной кривой. Соответствующие формулы были найдены Плюккером.

4.3. **Задачи.**

*Задача* 23. Найдите преобразование Лежандра для следующих функций:

**(a):** $f(x) = e^x$
**(b):** $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$

Ответ:
$(a)$ $\hat{f}(p) = p(\log p - 1)$.
$(b)$ $\hat{f}(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$, где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

*Задача* 24. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая строго выпуклая функция. Докажите, что дифференциалы функции $f$ в различных точках пространства $\mathbb{R}^n$ не могут совпадать.

*Задача* 25. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, второй дифференциал которой $d^2_{\mathbf{x}} f$ положительно определен для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Проверьте, что тогда $d^2_{\mathbf{y}} \hat{f} > 0$ для всех $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n*}$.

*Задача* 26. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество, а $f : U \to \mathbb{R}$ — строго выпуклая функция. Напомним, что $\hat{U}$ обозначает область определения

функции $\hat{f}$. Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и для любого $p \in \hat{U}$, выполнено неравенство

$$f(x) + \hat{f}(p) \geq p \cdot x.$$

Это неравенство называется неравенством Юнга. Если положить $f(x) = x^\alpha/\alpha$, где $\alpha > 1$, то получим классическое неравенство Юнга (мы пользуемся уже выполненным вычислением преобразования Лежандра для функции $f$):

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta} \geq p \cdot x, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

*Задача* 27. Предположим, что преобразование Лежандра $\hat{f}$ от строго выпуклой достаточное число раз дифференцируемой функции $f$ определено на всем $\mathbb{R}^n$. Докажите, что функция $\hat{f}$ тоже строго выпукла, и преобразование Лежандра от функции $\hat{f}$ совпадает с функцией $f$.

*Задача* 28. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, такое, что $\lambda U \subseteq U$ для всякого $\lambda > 0$. Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется *положительно-однородной степени* $k$, если

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n)$$

для всякой точки $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и всякого числа $\lambda > 0$. Докажите теорему *Эйлера об однородных функциях*: если $f$ — дифференцируемая положительно-однородная функция степени $k$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf.$$

Из теоремы Эйлера об однородных функциях вытекает следующее.

*Задача* 29. Предположим, что лагранжиан механической системы имеет вид

$$L(q, \dot{q}) = T_q(\dot{q}) - U(q),$$

где $T_q$ — квадратичная форма от $\dot{q}$, коэффициенты которой могут зависеть (гладко) от $q$, а $U$ — гладкая функция от $q$. (Практически все лагранжианы, встречающиеся в классической механике, имеют именно такой вид). Тогда соответствующий гамильтониан равен $T + U$, причем квадратичная форма $T$ записана в терминах импульсов $p$, а не скоростей $\dot{q}$.

*Задача* 30. Пусть $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Координата $q_1$ называется *циклической* для гамильтониана $H(q, p)$, если $H$ не содержит явной зависимости от $q_1$, то есть является функцией от $q_2, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$. Докажите, что если $q_1$ — циклическая координата, то соответствующий импульс $p_1$ сохраняется (то есть не зависит от времени для любой истинной траектории).

*Задача* 31. Рассмотрим гладкую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению мыльной пленки

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

Предположим, что функция $u$ допускает преобразование Лежандра $\hat{u}$. Найдите уравнение с частными производными, которому удовлетворяет функция $\hat{u}$.

## 5. Фунция действия и уравнение Гамильтона–Якоби

Основная заслуга Гамильтона в теоретической механике состоит в том, что он ввел *функцию действия*

$$S(q_{(0)}, t_0, q_{(1)}, t_1) = \inf_{\gamma} \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt.$$

Если траектория $\gamma$ оптимальная, то функция действия совпадает с функционалом действия, посчитанным для этой конкретной траектории $\gamma$. В дальнейшем, при рассмотрении функции действия мы всегда будем предполагать, что оптимальная траектория существует. Проводя аналогию с геометрической оптикой, можно сказать, что функция Гамильтона соответствует функции оптической длины пути, то есть функции $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, введенной раньше.

Рассмотрим действие $S(q_{(0)}, t_0, q, t_1)$ как функцию от $q$ (все остальные аргументы фиксированы). Найдем дифференциал этой функции. При этом мы воспользуемся замечательным рассуждением, заимствованным из учебника Ландау и Лифшица. Пусть $\gamma(t, q)$ — оптимальная траектория, проходящая через точку $q_{(0)}$ в момент времени $t_0$ и через точку $q$ в момент времени $t_1$. По определению, функция действия равна

$$S(q_{(0)}, t_0, q, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t, q), \dot{\gamma}(t, q))dt,$$

где, как обычно, точка обозначает дифференцирование по $t$. Положим $q = q_{(1)} + sa$ для некоторого вектора $a$, и продифференцируем выписанное равенство по $s$ при $s = 0$. Производную по $s$ будем, как и раньше, обозначать через $\delta$. При выводе уравнений Эйлера–Лагранжа мы уже проделали это дифференцирование, воспользовавшись формулой интегрирования по частям. Теперь лишь напомним результат:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta\gamma \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta\gamma|_{t_0}^{t_1}.$$

Заметим, что первый член в правой части обращается в нуль в силу уравнений Эйлера–Лагранжа. Второй же член равен $p(q_{(1)}) \cdot a$. Напомним, что мы рассматриваем функцию $S$ как функцию от $q$. Производная этой функции по направлению $a$ в точке $q_{(1)}$ равна $p(q_{(1)})$. Следовательно, первый дифференциал функции $S$ по $q$ равен $p(q)$:

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p(q).$$

Будем теперь рассматривать функцию действия $S(q_{(0)}, t_0, q, t)$ как функцию переменных $q$ и $t$. Поскольку $q_{(0)}$ и $t_0$ фиксированы, мы будем писать просто $S(q,t)$ вместо $S(q_{(0)}, t_0, q, t)$. В отличие от проведенных выше рассуждений, мы теперь не фиксируем конечный момент времени $t$. Чтобы посчитать частную производную $\frac{\partial S}{\partial t}$, мы воспользуемся следующим рассуждением, также заимствованным из учебника Ландау и Лифшица. Рассмотрим истинную траекторию $\gamma(\tau)$, проходящую в момент времени $\tau = t$ через точку $q$. Продифференцируем выражение $S(\gamma(\tau), \tau)$ по $\tau$ при $\tau = t$. С одной стороны, по правилу дифференцирования сложной функции, мы получим

$$\frac{\partial S}{\partial q}(q,t)\dot{\gamma}(t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,t).$$

При этом мы уже знаем, что производная $\frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$ равна имульсу $p(t)$ системы в момент времени $t$. С другой стороны, по определению интеграла действия, производная равна значению функции Лагранжа $L(q, \dot{\gamma}(t))$. Таким образом,

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) = L(q, \dot{\gamma}(t)) - p(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = -H(q, p(t)).$$

Формулы

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

можно рассматривать как альтернативное определение импульса и гамильтониана (Гамильтон именно так пришел к понятию гамильтониана). Это определение, возможно, выглядит более естественно с геометрической и механической точек зрения. Однако технически удобней работать с определением через преобразование Лежандра.

Знак минус в определении гамильтониана $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$ вызывал в свое время протест у большинства математиков, и привел к ожесточенному спору между математиками и физиками. Физики настояли на своем. Причина отрицательного знака состоит в том, что гамильтониан измеряет механическую энергию, а при поднятии камня его энергия увеличивается, а не уменьшается. По поводу обозначений велся еще один спор, в котором победили, наоборот, математики. Математики обозначали координаты буквой $q$ (от латинского qualitas), а импульсы буквой $p$ (от латинского potentia). Физики делали наоборот: координаты обозначали буквой $p$, а импульсы буквой $q$. В настоящее время, математические обозначения являются общепринятыми. Подчеркнем еще раз, что в физических задачах $H(q,p)$ — это механическая энергия, выраженная через координаты и импульсы.

Формулы $\frac{\partial S}{\partial q} = p$, $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$ влекут следующее уравнение в частных производных на функцию действия, называемое уравнением *Гамильтона–Якоби*:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби является аналогом уравнения эйконала

$$\left|\frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x})\right| = \frac{1}{v(\mathbf{x})}$$

для оптически изотропной среды.

Допустим, что функция действия $S(q_{(0)}, t_0, q_{(1)}, t_1)$ известна. Как, зная эту функцию, найти истинные траектории механической системы? Эта задача была решена Гамильтоном, который использовал аналогию с геометрической оптикой. Заметим, что производные функции действия по $q_{(0)}$ и $t_0$ могут быть вычислены по формуле

$$\frac{\partial S}{\partial q_{(0)}} = -p_{(0)}, \quad \frac{\partial S}{\partial t_0} = H(q_{(0)}, p_{(0)})$$

в которой $p_{(0)}$ — импульс, который имеет в момент времени $t_0$ частица (система), находящаяся в точке $q_{(0)}$ в момент $t_0$ и в точке $q_{(1)}$ в момент времени $t_1$. Заметим, что значения этих производных зависят только от $q_{(0)}$, $t_0$ и траектории, проходящей в момент времени $t_0$ через точку $q_{(0)}$. Однако они не зависят от выбора точки $q_{(1)}$ на той же самой траектории и от выбора момента времени $t_1$, в который система проходит через эту точку. Таким образом, форму и параметризацию истинных траекторий можно найти из равенств

$$\frac{\partial S}{\partial q_{(0)}} = const, \quad \frac{\partial S}{\partial t_0} = const.$$

В этом и состоит метод Гамильтона нахождения истинных траекторий. Как мы увидим в дальнейшем, чтобы найти истинные траектории, не обязательно знать функцию действия, а достаточно просто знать достаточно много решений уравнения Гамильтона–Якоби.

## Добавления и задачи.

5.1. **Уильям Роуэн Гамильтон (1805 – 1865).** Профессор астрономии в Дублине, президент королевской ирландской академии, член-корреспондент Петербургской академии наук. Еще в раннем возрасте показал себя гением. В 7 лет он знал древнееврейский язык; в 12 лет знал уже 12 языков, среди них персидский, арабский и санскрит. В 13 лет он написал руководство по сирийской грамматике, и примерно в это же время заинтересовался математикой. Получил позицию профессора в 22 года, еще будучи студентом Тринити-колледжа.

Гамильтон известен своими работами по геометрической оптике, классической механике, и алгебре (кватернионы).

5.2. **Задачи.**

*Задача* 32. Пусть $L(q, \dot{q}) = T_q(\dot{q}) - U(q)$, где $T_q(\dot{q})$ — риманова метрика, а $U(q)$ — гладкая функция. Найдите соответствующий гамильтониан.

*Задача* 33. Предположим, что лагранжиан $L = T(\dot{q})$ является невырожденной квадратичной формой от $\dot{q}$ (коэффициенты которой не зависят от $q$). Найдите функцию действия.

*Задача* 34. Найдите функцию действия для гармонического осциллятора, то есть лагранжиана $L(q, \dot{q}) = \dot{q}^2 - q^2$.

*Задача* 35. Докажите, что все траектории гамильтоновой системы в $\mathbb{R}^2$ с гамильтонианом $H(p, q) = p^4 + e^q$ периодичны, то есть для каждой траектории существует число $T > 0$, такое, что $q(t + T) = q(t)$ и $p(t + T) = p(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

*Задача* 36. Верно ли, что любая траектория любой гамильтоновой системы в $\mathbb{R}^2$ является периодической?

## 6. Лекция: гладкие многообразия

Прежде чем обсуждать симплектическую геометрию, нам нужно вспомнить теорию гладких многообразий и дифференциальных форм. Предполагается предварительное знакомство с этим предметом. Здесь мы дадим только краткое напоминание.

*Гладкое многообразие* размерности $n$ — это множество $M$, на котором зафиксировано пространство функций $C^\infty(M)$ (называемых гладкими функциями на $M$) со следующими свойствами:

(1) для любой точки $a \in M$, существует подмножество $U \subseteq M$, содержащее точку $a$, и набор функций $x_1, \ldots, x_n \in C^\infty(M)$, таких, что отображение
$$\phi : U \to \mathbb{R}^n, \quad \phi(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q)),$$
инъективно, причем множество $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто. Множество $U$ называется *координатной окрестностью* точки $a$, а функции $x_1, \ldots, x_n$ — локальными координатами около точки $a$. Мы требуем, чтобы ограничение любой функции $f \in C^\infty(M)$ на $U$ совпадало бы с некоторой гладкой функцией локальных координат, то есть имело бы вид $F \circ \phi$, где $F : \phi(U) \to \mathbb{R}$ — гладкая (то есть всюду бесконечное число раз дифференцируемая) функция.

(2) Если многообразие $M$ покрыто координатными окрестностями, и ограничение некоторой функции $f : M \to \mathbb{R}$ на каждую координатную окрестность является гладкой функцией от локальных координат, то $f \in C^\infty(M)$.

Простейшим и главным примером гладкого многообразия служит пространство $\mathbb{R}^n$, для которого $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество функций, всюду определенных и бесконечное число раз дифференцируемых.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное подмножество. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется гладкой, если для каждой точки $q \in M$ найдется окрестность $U$ точки $q$ в $\mathbb{R}^n$, такая, что ограничение функции $f$ на $M \cap U$ совпадает с ограничением некоторой гладкой функции на $U$.

*Задача* 37. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ задано одним уравнением $F = 0$, где $F$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$, такая, что $dF \neq 0$ на $M$. Проверьте, что гладкие функции на $M$, определенные выше, задают структуру гладкого многообразия на $M$.

Заметим, что любое гладкое многообразие является топологическим пространством, то есть имеет смысл говорить об открытых и замкнутых подмножествах. Во-первых, понятие открытого подмножества координатной окрестности легко определить: это просто прообраз произвольного открытого подмножества в $\mathbb{R}^n$ при отображении, заданном локальными координатими. Теперь мы скажем, что подмножество гладкого многообразия открыто, если открыто его пересечение с любой координатной окрестностью.

*Задача* 38. Проверьте выполнение аксиом топологического пространства.

Поскольку любое гладкое многообразие является топологическим пространством, имеет смысл говорить о связных, компактных и т.д. многообразиях.

Пусть $M$ и $N$ — гладкие многообразия. Отображение $\Phi : M \to N$ называется *гладким отображением*, если для любой гладкой функции $f$ на $N$, функция $f \circ \Phi$ является гладкой функцией на $M$.

*Задача* 39. Пусть $a \in M$ и $b = \Phi(a) \in N$. Рассмотрим локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки $a$ и локальные координаты $y_1, \ldots, y_m$ в окрестности точки $b$. Тогда существуют такие гладкие функции $\phi_i$, $i = 1, \ldots, m$, определенные в некоторой окрестности точки $(x_1(a), \ldots, x_n(a)) \in \mathbb{R}^n$, такие, что

$$y_i \circ \Phi = \phi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

на некоторой координатной окрестности точки $a$.

*Задача* 40. Проверьте, что композиция гладких отображений является гладким отображением.

Дадим еще несколько примеров гладких многообразий. Рассмотрим $n$-мерный тор $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ назовем $\mathbb{Z}^n$-периодической, если $f(q+a) = f(q)$ для любых $q \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{Z}^n$. Ясно, что любая гладкая $\mathbb{Z}^n$-периодическая фунция опускается до функции на торе $T^n$. По определению, будем считать гладкими функциями на торе как раз те функции, которые пришли из гладких $\mathbb{Z}^n$-периодических функций на $\mathbb{R}^n$.

Наконец, можно обобщить наш пример, в котором многообразие было задано одним уравнением в $\mathbb{R}^n$. Рассморим теперь множество $M$ точек $q \in \mathbb{R}^n$, заданное системой уравнений

$$f_1(q) = \cdots = f_k(q) = 0.$$

Предположим, что дифференциалы $df_1, \ldots, df_k$ линейно независимы в каждой точке $x \in M$. Тогда множество $M$ является гладким многообразием (понятие гладкой функции на $M$ уже определено выше).

Мы будем отождествлять вектор $v$ в $\mathbb{R}^n$ с координатами $(v_1, \ldots, v_n)$, отложенный от точки $q \in \mathbb{R}^n$, и оператор дифференцирования вдоль вектора $v$:

$$L_v : f \mapsto L_v f(q) = \lim_{t \to 0} \frac{f(q + vt) - f(q)}{t}.$$

Этот оператор линеен над действитеными числами и удовлетворяет правилу Лейбница. Дифференцирование вдоль вектора $v$ — это дифференцирование вдоль любой кривой, проходящей через точку $q$ и такой, что вектор скорости кривой в точке $q$ равен $v$. Точнее, чтобы получить $L_v f$, достаточно ограничить функцию $f$ на любую гладкую параметрическую кривую $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, такую, что $\gamma(0) = q$ и $\dot{\gamma}(0) = v$, а потом посчитать производную ограничения при $t = 0$:

$$L_v f(q) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0}.$$

На любом гладком многообразии, векторы тоже можно определять как дифференцирования. А именно, вектор $X$, касательный к многообразию $M$ в точке $q$, определяется как функционал $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

(1) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X f + \beta X g$ для всяких $f, g \in C^\infty(M)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (линейность над действительными числами),
(2) $X(fg) = f(a)Xg + g(a)Xf$ (правило Лейбница).

Установим некоторые простейшие свойства векторов:

(1) $X(1) = 0$, то есть производная постоянной функции, тождественно равной единице, вдоль любого вектора равна нулю.

В самом деле, имеем:

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = 1 \cdot X(1) + 1 \cdot X(1) = 2X(1).$$

(2) $X(c) = 0$ для любой константы $c$. Действительно, это вытекает из линейности дифференцирования.

(3) Пусть $\phi, \psi \in C^\infty(M)$ — такие функции, что $\phi(q) = \psi(q) = 0$. Тогда $X(\phi\psi) = 0$. Действительно,

$$X(\phi\psi) = \phi(q)X\psi + \psi(q)X\phi = 0.$$

(4) Пусть $\phi \in C^\infty(M)$ тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки $q$. Тогда $X\phi = 0$. В самом деле, рассмотрим гладкую функцию $\psi$, равную нулю в точке $q$ и тождественно равную единице вне окрестности точки $q$, в которой $\phi = 0$. (В курсе анализа учат строить примеры таких функций; мы не будем повторять эти примеры). Тогда $\phi = \phi\psi$. Следовательно, $X\phi = 0$.

(5) Если функция $\phi \in C^\infty(M)$ постоянна в некоторой окрестности точки $q$, то $X\phi = 0$. Действительно, функция $\phi - \phi(0)$ удовлетворяет условиям предыдущего пункта.

Следующее утверждение называется леммой Адамара:

**Теорема 10.** *Пусть $U$ — открытое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат, а $f \in C^\infty(U)$. Тогда*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \ldots, x_n),$$

*где $g_i$ — некоторые гладкие функции на $U$.*

*Доказательство.* Имеем:

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{f(tx)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x),$$

где $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt$. □

**Теорема 11.** *Рассморим гладкое многообразие $M$ и векторное поле $X$ на $M$. Пусть $q \in M$, а $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальная система координат в окрестности точки $q$, такая, что $x_i(q) = 0$. Пусть $Xx_i = \alpha_i$. Тогда*

$$Xf = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

*Доказательство.* Можно считать, что $M = \mathbb{R}^n$, $q = 0$ и $f(0) = 0$. Тогда, по лемме Адамара, $f = \sum x_i g_i$ для некоторых гладких функций $g_i$. Из этого представления следует, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = g_i(0)$. Имеем:

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} X(x_i) g_i(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

□

Отсюда вытекает, что множество $T_qM$ всех векторов в фиксированной точке $q$ многообразия $M$ образует векторное пространство размерности $n$. В самом деле, как видно из доказанной выше теоремы, касательный вектор в точке $q$ полностью определяется своими координатами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем отображение $T_qM \to \mathbb{R}^n$, сопоставляющее каждому вектору его координаты в данной локальной системе координат, линейно. Пространство $T_qM$ называется *касательным пространством* к $M$ в точке $q$.

Говорят, что на многообразии $M$ задано *векторное поле* $X$, если для каждой точки $q \in M$ определен вектор $X_q \in T_qM$. Векторное поле называется *гладким*, если в любой локальной системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$ имеем $Xf = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ для любой гладкой функции $f$, где $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_1, \ldots, x_n)$ — гладкие функции от координат, не зависящие от выбора функции $f$. В этом случае пишут

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

На самом деле, вместо того, чтобы предполагать, что векторное поле $X$ имеет такой вид в каждой локальной системе координат, достаточно предположить, что векторное поле имеет такой вид хотя бы в одной локальной системе координат. *Координаты (или компоненты) векторного поля* (то есть функции $\alpha_i$) в другой системе координат могут быть другими, но если эти функции были гладкими, то они и останутся гладкими.

Всюду в дальнейшем под векторными полями мы будем иметь в виду гладкие векторные поля.

*Задача* 41. Как преобразуются компоненты векторного поля при изменении локальной системы координат? *Ответ:* Если $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ — две разные системы координат, и

$$X = \sum \alpha_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum \beta_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j},$$

то

$$\beta_i(y) = \sum_k \alpha_k(x) \frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

Это вытекает из правила дифференцирования сложной функции.

Другое (эквивалентное) определение векторного поля состоит в том, что гладкое векторное поле — это гладкий линейный дифференциальный оператор первого порядка, то есть отображение $A : C^\infty \to C^\infty$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) линейность: $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$,
(2) правило Лейбница: $A(fg) = (Af)g + f(Ag)$.

Векторное поле $X$ в смысле первого определения задает дифференциальный оператор $A$ по формуле $A(f) = g$, где $g(q) = X_q f$.

*Задача* 42. Докажите эквиваелнтность этих двух определений.

Векторные поля имеют такой геометрический смысл. Пусть $g^t : M \to M$ — гладкое семейство гладких отображений, то есть отображение $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M$, заданное формулой $(t, a) \mapsto g^t a$, гладко. Семейство взаимно однозначных отображений $g^t$ можно представлять себе физически как движение сплошной среды: частица среды, которая в момент времени $t = 0$ находилась в точке $g^0(x)$, в момент времени $t$ находится в точке $g^t(x)$. Каждое гладкое семейство гладких отображений $g^t$ задает векторное поле $X$, которое действует на функции по формуле

$$Xf(x) = \frac{d}{dt} f(g^t(x)) \,|_{t=0} \,.$$

Физически, вектор $X_q$ равен вектору скорости частицы среды, находящейся в момент $t = 0$ в точке $q$.

Верно и обратоное: всякое гладкое векторное поле получается из этой конструкции. Этот факт вытекает из фундаментальной теоремы существования и единственности, которая обсуждалась в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы напомним формулировку этой теоремы, удобную для наших целей:

**Теорема 12** (Теорема Существования и Единственности). *Рассмотрим гладкое векторное поле $A$ на многообразии $M$. Для всякой точки $q \in M$ найдется $\varepsilon > 0$ и единственный путь $t \mapsto g^t(q)$ определенный для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, такой, что*

$$\frac{d}{dt} f(g^t(q)) = Af(g^t(q)).$$

*Эти пути включаются в гладкое семейство отображений $g^t : U \to M$, где $U$ — некоторая окрестность точки $q$.*

*Задача* 43. Пусть $t$, $s$, $t+s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда $g^t \circ g^s = g^{t+s}$ там, где обе части этого равенства определены.

Указание: это вытекает из теоремы единственности.

Решение: в самом деле, по определению пути $g^t(g^s(q))$ (выходящего из точки $g^s(q)$), имеем

$$\frac{d}{dt} f(g^t(g^s(q))) = Af(g^t \circ g^s(q)).$$

С другой стороны, по по определению пути $g^t(q)$ (выходящего из точки $q$), имеем

$$\frac{d}{dt} f(g^{t+s}(q))) = Af(g^{t+s}(q)).$$

Мы получили два пути

$$t \mapsto g^t(g^s(q)), \quad t \mapsto g^{t+s}(q),$$

проходящих при $t = 0$ через одну и ту же точку $g^s(q)$ и касательных к одному и тому же векторному полю $A$. Из теоремы единственности вытекает, что эти два пути совпадают.

**Теорема 13.** *Пусть $M$ компактно, а $A$ — гладкое векторное поле на $M$. Тогда существует гладкое отображение $\mathbb{R} \times M \to M$, $q \mapsto g^t(q)$, такое, что*

$$\frac{d}{dt} f(g^t(q)) = Af(g^t(q))$$

*для всякой гладкой функции $f$ на $M$. Отображения $g^t : M \to M$ удовлетворяют условию $g^t \circ g^s = g^{t+s}$.*

Локальный вариант этого утверждения содержится в теореме существования и единственности. Чтобы доказать теорему, достаточно, пользуясь компактностью, покрыть многообразие конечным числом окрестностей, в которых локальное утверждение выполнено. Семейство гладких отображений $g^t : M \to M$, $t \in \mathbb{R}$ со свойством $g^{t+s} = g^t \circ g^s$ называется однопараметрической группой диффеоморфизмов многообразия $M$. Вообще, диффеоморфизмом многообразия $M$ называется такое гладкое отображение $g : M \to M$, обратное к которому тоже гладкое. Одпопараметрическая группа диффеоморфизмов действительно состоит из диффеоморфизмов, поскольку $(g^t)^{-1} = g^{-t}$. Однопараметрическую группу диффеоморфизмов, удовлетворяющую условиям теоремы 13, мы будем называть потоком, порожденным векторным полем $A$.

Как мы уже говорили, можно думать про векторные поля на $M$ как про линейные дифференциальные операторы первого порядка $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. У таких операторов можно брать композиции, которые уже не будут представляться векторными полями. Определим линейный дифференциальный оператор порядка $\leq n$ как линейную комбинацию операторов вида $A_1 \circ \cdots \circ A_n$, где $A_i$ — векторные поля. Согласно этому определению, линейный дифференциальный оператор может действовать на гладкие функции. В локальных координатах, это действие сводится к вычислению линейной комбинации некоторых (кратных) частных производных. Коэффициентами в этой линейной комбинации могут служить любые гладкие функции.

Пока для нас важны только операторы первого и второго порядков. Пусть $D$ — оператор порядка не выше 2. Определим квадратичный символ $\sigma_2(D)_q$ в точке $q \in M$. Это элемент векторного пространства $Sym^2(T_qM)$, порожденного формальными произведениями пар касательных векторов в точке $q$. Формальные произведения подчинены соотношениям коммутативности, то есть $v \cdot w = w \cdot v$ для любых $v$, $w \in T_qM$. Всякий элемент пространства $Sym^2(T_qM)$ можно представить в виде линейной комбинации таких произведений. Можно отождествить пространство $Sym^2(T_qM)$ с пространством всех квадратичных форм на кокасательном пространстве $T_q^*M$. Элемент $\sigma_2(D)_q \in Sym^2(T_qM)$ определяется следующей формулой

$$\sigma_2(A_1 \circ B_1 + \cdots + A_m \circ B_m)_q = A_{1,q} \cdot B_{1,q} + \cdots + A_{m,q} \cdot B_{m,q}.$$

Здесь, например, $A_{1,q}$ — это вектор из $T_qM$, принадлежащий векторному полю $A_1$.

**Теорема 14.** *Это определение корректно, то есть если $D = A_1 \circ B_1 + \cdots + A_m \circ B_m = 0$, то $\sigma_2(D) = 0$ во всех точках.*

Это утверждение нетрудно проверить в координатах (задача: проверьте!).

Пусть $A$ и $B$ — два векторных поля. Определим их *коммутатор* формулой

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A.$$

Левая часть выглядит как дифференциальный оператор второго порядка. Однако $\sigma_2(A \circ B - B \circ A) = A \cdot B - B \cdot A = 0$, поскольку произведение в $Sym^2$ коммутативно (вообще-то это просто научный способ сослаться на то, что смешанные частные производные равны). Отсюда вытекает, что $A \circ B - B \circ A$ — это на самом деле

оператор первого порядка, а не второго, как можно было бы подумать. Но линейные дифференциальные операторы первого порядка — это векторные поля. Таким образом, коммутатор двух векторных полей снова является векторным полем.

*Задача* 44. На плоскости с координатами $x$ и $y$, найдите коммутатор векторных полей $\frac{\partial}{\partial x}$ и $x\frac{\partial}{\partial y}$.

*Задача* 45. Докажите, что коммутатор векторных полей подчиняется следующим тождествам:

- $[A, B] = -[B, A]$,
- $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$,
- $[A, fB] = (Af)B + f[A, B]$ для любой гладкой функции $f$ (правило Лейбница),
- $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$ (тождество Якоби)

(Тождество Якоби является правилом Лейбница относительно коммутатора).

## 7. Лекция: дифференциальные формы

Пусть $M$ — гладкое многообразие, а $\mathrm{Vect}(M)$ — пространство всех гладких векторных полей на $M$. Определим (гладкую) (дифференциальную) 1-форму на $M$ как отображение $\alpha : \mathrm{Vect}(M) \to C^\infty(M)$, удовлетворяющее следующим свойствам

$$\alpha(fX) = f\alpha(X), \quad \alpha(X + Y) = \alpha(X) + \alpha(Y)$$

для любых гладких векторных полей $X$, $Y$ и любой функции $f \in C^\infty(M)$.

*Задача* 46. Рассмотрим векторное поле $X \in \mathrm{Vect}(M)$ и 1-форму $\alpha$. Докажите, что значение $\alpha(X)_q$ функции $\alpha(X)$ в точке $q \in M$ зависит только $\alpha$ и от вектора $X_q$ (т.е. вектора в точке $q$, принадлежащего векторному полю $X$), но не зависит от, того, как выглядит поле $X$ в остальных точках.

Можно дать эквивалентное определение 1-формы. Пусть для всякой точки $q \in M$ задан линейный функционал на касательном пространстве $T_qM$ в точке $M$, причем этот функционал зависит гладко от точки $q$ (что значит гладкая зависимость от точки, нужно уточнить — уточните!). Тогда задана дифференциальная 1-форма $\alpha$, такая что линейные функционалы $l_q : T_q \to \mathbb{R}$, о которых шла речь, имеют вид $l_q(X_q) = \alpha(X)_q$ (чтобы правая часть была определена, нужно произвольным образом продолжить вектор $X_q$ до гладкого векторного поля $X$ на $M$).

*Задача* 47. Докажите, что любой касательный вектор (в любой точке многообразия $M$) можно включить в некоторое гладкое векторное поле на $M$.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальная система координат на многообразии $M$. Напомним, что каждая из координат $x_i$ — это гладкая функция на некотором открытом подмножестве $U$ многообразия $M$. Для 1-формы $\alpha$ положим

$$\alpha_i(q) = \alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}).$$

Это равенство определяет некоторую гладкую функцию $\alpha_i$ на $U$. Функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются координатами 1-формы $\alpha$ относительно данной локальной системы координат. Определим 1-форму $dx_i$ на $U$ при помощи формулы

$$dx_i(A) = A_i.$$

Здесь $A$ — это произвольное гладкое векторное поле на $U$, которое в данной системе координат записывается как $A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial}{\partial x_n}$.

*Задача* 48. Докажите, что всякая гладкая 1-форма на $U$ записывается в виде

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx_i.$$

Гладкие 1-формы можно интегрировать по гладким кривым. Рассмотрим гладкое отображение $\gamma : [0,1] \to M$. Тогда для всякого $t \in [0,1]$, определен вектор скорости $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Если на многообразии $M$ задана 1-форма $\alpha$, то эту форму можно применить к каждому из векторов $\dot{\gamma}(t)$, и получить тем самым гладкую функцию от $t$. Эту функцию, в свою очередь, можно проинтегрировать по отрезку $[0,1]$. Полученный интеграл называется интегралом от формы $\alpha$ по параметрической кривой $\gamma$:

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \alpha(\dot{\gamma}(t))dt.$$

На самом деле, важна не параметризация, а только ориентация кривой: если мы сделаем гладкую замену параметра на кривой, при которой ориентация не поменяется, то интеграл от дифференциальной 1-формы тоже сохранится. А если ориентация поменяется, то интеграл поменяет знак.

*Задача* 49. Докажите сформулированные выше утверждения.

Для всякой гладкой функции $f$ на многообразии $M$, определена 1-форма $df$ по формуле:

$$df(A) = Af.$$

Эта форма называется дифференциалом функции $f$. Операция взятия дифференциала удовлетворяет правилу Лейбница

$$d(fg) = g\,df + f\,dg.$$

Определим теперь (гладкую дифференциальную) 2-форму. Это отображение $\alpha$ из $\mathrm{Vect}(M)\times\mathrm{Vect}(M)$ (т.е. из пар гладких векторных полей) в $C^\infty(M)$ со следующими свойствами:

$$\alpha(X,Y) = -\alpha(Y,X), \quad \alpha(X,Y+Z) = \alpha(X,Y) + \alpha(X,Z),$$

$$\alpha(X,fY) = f\alpha(X,Y)$$

для любых гладких векторных полей $X$, $Y$, $Z$ и любой гладкой функции $f$.

Так же, как и в случае 1-форм, имеет смысл говорить о значении 2-формы на паре векторов, отложенных в одной и той же точке, т.е. принадлежащих одному и тому же касательному пространству. Это значение не зависит от того, как мы эти векторы продолжим до гладких векторных полей на всем многообразии.

Если даны две 1-формы $\alpha$ и $\beta$, то определено их внешнее произведение $\alpha\wedge\beta$, являющееся 2-формой. Внешнее произведение определяется по следующей формуле:

$$\alpha\wedge\beta(A,B) = \alpha(A)\beta(B) - \alpha(B)\beta(A).$$

*Задача* 50. Проверьте, что так определенная функция от пар векторных полей действительно является 2-формой.

Если $(x_1,\dots,x_n)$ — локальная система координат на многообразии $M$, то любая 2-форма $\alpha$ записывается относительно этой системы координат следующим образом:

$$\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} dx_i \wedge dx_j.$$

Здесь $\alpha_{i,j}$ — некоторые гладкие функции, называемые коэффициентами формы $\alpha$ относительно данной системы координат. Коэффициенты 2-формы $\alpha$ можно определить по формуле $\alpha_{i,j} = \alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$. Нетрудно видеть, что $\alpha_{i,j} = -\alpha_{j,i}$.

*Задача* 51. Докажите сформулированные выше утверждения.

С каждой гладкой 1-формой $\beta$ связана гладкая 1-форма $d\beta$, называемая дифференциалом формы $\beta$. Дифференциал определяется следующей формулой:

$$d\beta(A,B) = A\beta(B) - B\beta(A) - \beta([A,B]).$$

*Задача* 52. Докажите, что $d\alpha$ действительно является 2-формой.

Впрочем, приведенное алгебраическое определение дифференциала не проясняет геометрический смысл этого понятия. Говоря неформально, геометрический смысл состоит вот в чем. Пара касательных векторов, отложенных в одной и той же точке, определяет параллелограмм в касательном пространстве. Как видно из определения, значение 2-формы на паре векторов зависит от ориентации и площади этого параллелограмма, но не от его формы (под ориентацией мы понимаем то, в какой плоскости лежит параллелограмм, и как он ориентирован в этой плоскости, то есть каково направление обхода от первого вектора ко второму). Про параллелограмм в касательном пространстве можно думать (это не совсем корректно, но полезно) как про бесконечно малую ориентированную двумерную площадку в многообразии. Таким образом, про 2-форму можно думать как про некоторого специального вида функцию на бесконечно малых площадках. Проинтегрируем форму $\alpha$ по границе площадки. Получится функция от бесконечо малой площадки, которая и совпадает с дифференциальной 2-формой $d\alpha$. Член с коммутатором — это поправочный член, ответственный за разницу между малой площадкой в многообразии и параллелограммом в касательном пространстве.

Дифференциальные 2-формы можно интегрировать по двумерным поверхностям. Рассмотрим сначала гладкую параметрическую поверхность $\Gamma : W \mapsto M$, где $W$ — область на плоскости с координатами $(u,v)$. Интеграл по этой поверхности от формы $\alpha$ определяется следующей формулой:

$$\int_\Gamma \alpha = \int_W \alpha(\frac{\partial\Gamma}{\partial u}, \frac{\partial\Gamma}{\partial v})\, du\, dv.$$

На самом деле, интеграл не зависит от параметризации, а зависит только от ориентации гладкой поверхности. Мы рассмотрели случай, когда поверхность является образом плоской области при некотором гладком отображении. На самом деле, нам понадобятся поверхности более общего вида, которые можно склеить из нескольких таких кусков. Например, можно рассмотреть произвольное объединение выпуклых ориентрированных многоугольников (лежащее в пространстве произвольной размерности), и на

каждом из этих многоугольников определить гладкое отображение в многообразие $M$. Допустим, что эти отображения согласованы на пересечениях. Тогда такой набор данных называется гладкой двумерной цепью. Интеграл от $\alpha$ по гладкой двумерной цепи определяется как сумма интегралов по отдельным многоугольникам.

Граница $\partial\Gamma$ ориентированной двумерной цепи $\Gamma$ является ориентированной 1-мерной цепью, то есть конечным объединением гладких кривых. Ориентация на каждой граничной кривой выбирается таким образом, чтобы при обходе кривой в положительном направлении, поверхность все время оставалась слева (лево и право определяются в соответствии с ориентацией поверхности). Интеграл от 1-формы по $\partial\Gamma$ можно связать с интегралом от дифференциала этой формы по $\Gamma$. Это частный случай формулы Стокса:

$$\int_{\partial\Gamma} \alpha = \int_{\Gamma} d\alpha.$$

Мы примем формулу Стокса без доказательства. Доказательство формулы Стокса приводится в курсе анализа или в курсе дифференциальной геометрии.

Дифференциальная 1-форма $\alpha$ называется замкнутой, если $d\alpha = 0$, и точной, если $\alpha$ совпадает с дифференциалом некоторой гладкой функции. В пространстве $\mathbb{R}^n$, любая замкнутая 1-форма точна. В самом деле, зафиксируем произвольную начальную точку $q_0$, и рассмотрим интеграл

$$f(q) = \int_{q_0}^{q} \alpha$$

Этот интеграл не зависит от выбора пути, соединяющего точку $q_0$ с точкой $q$. В самом деле, если мы рассмотрим два разных пути $\gamma_0$ и $\gamma_1$, соединяющих точку $q_0$ с точкой $q$, то объединение этих путей является границей некоторой поверхности, и, как вытекает из формулы Стокса, интеграл от $\alpha$ по объединению $\gamma_0 \cup \gamma_1$ равен нулю. Следовательно, $f(q)$ не зависит от пути. Нетрудно проверить, что $df = \alpha$.

По аналогии с 2-формами, мы можем определить (гладкие дифференциальные) 3-формы на многообразии $M$ как отображения

$$\alpha : \mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M) \to C^\infty(M),$$

линейные по каждому аргументу над $C^\infty(M)$ и кососимметричные относительно перестановки аргументов. Другими словами, для любых векторных полей $X_1$, $X_2$, $X_3$, $Y_1$, перестановки $\sigma$ на множестве $\{1, 2, 3\}$, и гладкой функции $f$, имеем

$$\alpha(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\alpha(X_1, X_2, X_3),$$

$$\alpha(X_1+Y_1,X_2,X_3)=\alpha(X_1,X_2,X_3)+\alpha(Y_1,X_2,X_3),$$
$$\alpha(fX_1,X_2,X_3)=f\alpha(X_1,X_2,X_3).$$

Для любой 2-формы $\beta$, определен дифференциал

$$d\beta(X,Y,Z)=X\beta(Y,Z)+Y\beta(Z,X)+Z\beta(X,Y)-$$
$$-\beta([X,Y],Z)-\beta([Y,Z],X)-\beta([Z,X],Y).$$

Заметьте, что всесте с каждым слагаемым, в эту формулу входят и все члены, получающиеся из данного циклической перестановкой векторных полей $X$, $Y$, $Z$. Поэтому достаточно запомнить только два слагаемых: $X\beta(Y,Z)$ и $-\beta([X,Y],Z)$; остальные получаются из этих циклическими перестановками. Нетрудно проверить непосредственно, что дифференциал всякой 2-формы является 3-формой. Наиболее содержательная часть этого утверждения состоит в том, что дифференциал 2-формы линеен относительно умножения на гладкую функцию.

## 8. Лекция: симплектические многообразия

*Симплектическая структура* на многообразии $M$ — это 2-форма $\omega$ на $M$ со следующими свойствами:

(1) форма $\omega$ замкнута, т.е. $d\omega=0$,
(2) форам $\omega$ невырожденна, т.е. для каждой 1-формы $\alpha$ на $M$, существует такое векторное поле $X$ на $M$, что $\alpha(Y)=\omega(Y,X)$ для всякого векторного поля $Y$ на $M$.

Второе условие эквиваелнтно тому, что ограничение формы $\omega$ на каждое касательное пространство к $M$ является невырожденной билинейной формы (невырожденность понимается в смысле теории билинейных форм).

*Задача* 53. Докажите, что векторное поле $X$ из условия (2) единственно.

Мы получаем линейное отображение из 1-форм в векторные поля, которое каждой 1-форме $\alpha$ сопоставляет векторное поле $X$ на $M$, такое, что $\alpha(Y)=\omega(Y,X)$ для всякого векторного поля $Y$ на $M$. Обозначим это отображение через $\mathcal{I}$.

Пусть $H$ — гладкая функция на многообразии $M$. Векторное поле $X_H=\mathcal{I}(dH)$ называется *гамильтоновым векторным полем*, соответствующим гамильтониану $H$. Другими словами, по определению, $X_H$ — это единственное векторное поле, удовлетворяющее тождеству

$$dH(Y)=\omega(Y,X_H)$$

для любого гладкого векторного поля $Y$ на $M$.

Пример. Рассмотрим координатное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Форма

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

является симплектической структурой на многообразии $M$. Эта симплектическая структура называется стандартной симплектической структурой на $\mathbb{R}^{2n}$. Посмотрим, как выгладит гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану $H$. Имеем

$$dH(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i(Y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i(Y).$$

С другой стороны,

$$\omega(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} (dp_i(X) dq_i(Y) - dq_i(X) dp_i(Y)).$$

Если $X = X_H$, то мы полжны иметь $dH(Y) = -\omega(X, Y)$ для всех $Y$. В частности, числа $dp_i(Y)$ и $dq_i(Y)$ можно воспринимать как независимые переменные. Приравнивая коэффициенты при этих переменных, получаем

$$dp_i(X) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad dq_i(X) = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Отсюда следует, что система дифференциальных уравнений, заданная векторным полем $X$, имеет вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Таким образом, мы получили стандартный вид системы уравнений Гамильтона, что и является основной (но не единственной) мотивировкой введенных выше общих понятий. Мы обсудим другие примеры симплексических структур позже.

Пусть $X_H$ — гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану $H$. Поток $g_H^t$, порожденный векторным полем $X$, называется гамильтоновым потоком с гамильтонианом $H$. По определению потока, порожденного векторным полем, имеем

$$\frac{d}{dt} f(g_H^t(a)) = X_H f(g_H^t(a))$$

для всякой точки $a \in M$.

**Теорема 15.** *Гамильтонов поток сохраняет гамильтониан:*

$$H \circ g_H^t = H \quad \forall t.$$

**Теорема 16.** *Гамильтонов поток сохраняет симплектическую форму:*

$$(g_H^t)^*\omega = \omega \quad \forall t.$$

Пусть $f$ и $g$ — гладкие функции на симплектическом многообразии $M$. Определим их скобку Пуассона по формуле

$$\{f, g\} = X_f(g).$$

Из этого определения сразу видно, что функция $F$ инвариантна относительно гамильтонового потока с гамильтонианом $H$ тогда и только тогда, когда

$$\{H, F\} = 0.$$

Такая функция $F$ называется *первым интегралом* (гамильтоновой системы, гамильтонового потока или просто гамильтониана $H$).

Обсудим некоторые свойства скобки Пуассона. По определению, имеем

$$\{f, g\} = X_f(g) = dg(X_f) = \omega(X_g, X_f).$$

Отсюда сразу же вытекает кососимметричность скобки Пуассона:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

*Задача* 54. Проверьте, что скобка Пуассона удовлетворяет правилу Лейбница

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

и тождеству Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

В тождестве Якоби, все члены получаются друг из друга циклической перестановкой аргументов.

*Задача* 55. В координатном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой,

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

## 9. Задачи к промежуточной контрольной работе: вариант 1

*Задача* 56. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ — равносторонний треугольник со стороной 1. Найдите площадь фигуры $\Delta + (-\Delta)$. Здесь $-\Delta$ — это треугольник $\Delta$, повернутый на 180 градусов.

*Задача* 57. Рассмотрим двумерный тор с координатами $p, q \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и функцию

$$H(p,q) = \sin(p)\cos(q)$$

на этом торе. Верно ли, что любое решение $(p(t), q(t))$ гамильтоновой системы

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

периодично, то есть $p(t+T) = p(t)$, $q(t+T) = q(t)$ для некоторого $T > 0$? Если да, то докажите. Если нет, то приведите пример непериодического решения.

*Задача* 58. Найдите преобразование Лежандра функции

$$f(x,y) = x^4 + y^4.$$

*Задача* 59. Точка движется свободно по поверхности параболоида

$$z = x^2 + y^2$$

(свободность движения означает, что лагранжиан точки совпадает с кинетической энергией). Выпишите уравения движения точки.

*Задача* 60. Пусть $g^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение, заданное формулой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + ty^2 \\ y \end{pmatrix}.$$

Найдите координаты векторного поля $v$, такого, что

$$L_v f(x) = \frac{d}{dt} f(g^t(x))\,|_{t=0}$$

для всякой гладкой функции $f$.

*Задача* 61. В пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана постоянная 2-форма

$$\omega = 3\,dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3 + 5\,dx_3 \wedge dx_4.$$

Проверьте, что эта форма симплектическая. Найдите косоортогональное дополнение к плоскости $x_3 = x_4 = 0$ относительно формы $\omega$.

*Задача* 62. Рассмотрим векторное поле на $\mathbb{R}^2$ с координатами $(x, -y + \sin x)$. Является ли это векторное поле гамильтоновым относительно симплектической структуры $\omega = dx \wedge dy$? Если да, то найдите гамильтониан.

*Задача* 63. Рассмотрим следующие симлектические структуры на $\mathbb{R}^2$:

$$\omega_1 = dx \wedge dy, \quad \omega_2 = (1+x^2)dx \wedge dy, \quad \omega_3 = e^{-x^2-y^2} dx \wedge dy.$$

Какие из них переводятся в какие другие диффеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^2$? Обоснуйте ответ.

## 10. Задачи к промежуточной контрольной работе: вариант 2

*Задача* 64. На торе $T^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$, рассмотрим симплектическую структуру

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

и функцию $H = \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \sin x_4$. Найдите

$$L_{v_H}(\sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \sin^2 x_3 \sin^2 x_4 (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)),$$

где $v_H$ — гамильтонианово векторное поле, соответствующее гамильтониану $H$.

*Задача* 65. Найдите симплектический базис (базис Дарбу) для формы

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_4$$

на $\mathbb{R}^4$.

*Задача* 66. Верно ли, что все решения гамильтоновой системы

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

с гамильтонианом $H = p^4 - p^2q^2 + q^4$ периодические?

*Задача* 67. Пусть $H : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на симплектическом многообразии $M$, а вектроное поле $v_H$ — гамильтоново с гамильтонианом $H$. Докажите, что $v_H \in T \cap T^\perp$, где $T$ — касательное пространство в точке $x$ к гиперповерхности $\{H = const\}$, а $T^\perp$ — его косоортогональное дополнение.

*Задача* 68. Пусть $\Delta$ — равносторонний треугольник в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $W(x,y)$ расстояние от точки $(x,y)$ до треугольника $\Delta$. Докажите, что

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 1$$

для почти всех точек $(x,y)$ вне треугольника $\Delta$. Найдите площадь множества $\{W \leq \varepsilon\}$.

## 11. Лекция: примеры симплектических структур

В этой лекции, мы напомним примеры симплектических структур, которые уже были разобраны, а также разберем новые примеры.

11.1. **Симплектическая структура на кокасательном расслоении.** Напомним, что (ко)касательное расслоение на многообразии $M$ определяется как дизъюнктное объединение всех (ко)касательных пространств к $M$. Чтобы ввести на касательном расслоении $TM$ структуру гладкого многообразия, достаточно покрыть это множество локальными картами, то есть определить локальные системы координат. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — локальная система координат на $M$. Точки касательного расслоения изображаются парами $(q, v)$, где $q \in M$, $v \in T_qM$. По определению, отображения

$$(q, v) \mapsto (x_1(q), \dots, x_n(q), dx_1(v), \dots, dx_n(v))$$

определяют локальную систему координат на $TM$. Аналогично, точки кокасательного расслоения $T^*M$ изображаются парами $(q, p)$, где $q \in M$, $p \in T_q^*M$. По определению, отображения

$$(q, p) \mapsto (x_1(q), \dots, x_n(q), p(\frac{\partial}{\partial x_1}), \dots, p(\frac{\partial}{\partial x_n}))$$

определяют локальную систему координат на $T^*M$.

Таким образом, с каждой локальной системой координат $(x_1, \dots, x_n)$ на $M$ связаны координатные функции $x_1, \dots, x_n$, $p_1, \dots, p_n$ на $T^*M$. Они определяются формулами

$$x_i(q, p) = x_i(q), \quad p_i(q, p) = p(\frac{\partial}{\partial x_i}).$$

Определим 1-форму на $T^*M$ в данной локальной системе координат следующим образом:

$$\theta = \sum p_i \, dx_i.$$

*Задача* 69. Проверьте, что эта форма не зависит от выбора локальной системы координат на $T^*M$, связанной с локальной системой координат на $M$ так, как описано выше.

Действительно, перейдем от локальных координат $x_i$ к локальным координатам $\tilde{x}_i$ на многообразии $M$. Зафиксируем произвольный набор чисел $p_1, \dots, p_n$, и рассмотрим 1-форму $\sum p_i dx_i$ на многообразии $M$. В новой системе координат эта форма запишется в виде $\sum \tilde{p}_i \tilde{x}_i$, где $\tilde{p}_i$ — это значение нашей формы на координатном

векторе $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$ новой системы координат. По определению, на кокасательнои расслоении, точка со старыми координатами $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$ получит новые координаты $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$. Таким, образом, нам нужно только доказать, что равенство

$$\sum p_i dx_i = \sum \tilde{p}_i d\tilde{x}_i$$

выполнено не только на $M$, но и на кокасательном расслоении к $M$. Но это верно, т.к. обе формы приходят из $M$ при помощи естественной проекции $T^*M \to M$.

Таким образом, на кокасательном пространстве к любому многообразию имеется каноническая 1-форма.

*Задача* 70. Проверьте, что на касательном пространстве к любому многообразию имеется каноническое ненулевое векторное поле. Однако конструкция, аналогичная приведенной выше, не проходит.

Напомним следующую теорему:

**Теорема 17.** *Форма $\omega = d\theta$ является симплектической структурой на $T^*M$.*

Это и есть каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоении.

Если $M$ — конфигурационное пространство механической системы, то $T^*M$ называется *фазовым пространством.* Например, для математического маятника конфигурационным пространством является окружность (множество всех возможных углов наклона маятника). Соответствующее фазовое пространство диффеоморфно прямому произведению $S^1 \times \mathbb{R}$. В самом деле, точка фазового пространства — это пара $(z, \alpha)$, где $z \in S^1$, $\alpha \in T_z^* S^1$. Сопоставим такой паре пару $(z, \alpha(iz)) \in S^1 \times \mathbb{R}$ (заметим, что если про окружность думать как про множество комплексных чисел, по модулю равных единице, то для каждой точки $z$ на окружности, комплексное число $iz$ символизирует вектор, касательный к окружности в точке $z$).

*Задача* 71. Введжем на $S^1 \times \mathbb{R}$ локальную систему координат $(\phi, t)$, где $\phi$ — локальная угловая координата на окружности (измеренная в радианах), а $t$ — естественная координата на числовой прямой. Тогда каноническая симплектическая структура на $S^1 \times \mathbb{R}$ записывается в виде $dt \wedge d\phi$.

11.2. **Симплектические структуры в теории инвариантов.** Рассмотрим однородный многочлен $p(x, y)$ степени $k$ от двух переменных $x$ и $y$. На пространстве $V_k$ всех таких многочленов действует группа $SL_2(\mathbb{R})$. А именно, результат применения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

к многочлену $p(x, y)$ — это многочлен

$$\tilde{p}(x, y) = p(ax + by, cx + dy).$$

Таким образом, группа $SL_2(\mathbb{R})$ действует просто линейными заменами координат. Если $p$ рассматривать как функцию на $\mathbb{R}^2$ (или на $\mathbb{C}^2$), то $\tilde{p} = p \circ A$, где $A$ рассматривается как линейный оператор на $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}^2$). Некоторое выражение составленное из коэффициентов многочлена $p$, называется *инвариантом*, если это выражение, посчитанное для $\tilde{p}$, всегда совпадает с выражением, посчитанным для $p$, какую бы замену переменных $A \in SL_2(\mathbb{R})$ мы ни сделали.

Более общим образом, функция $I(f_1, \ldots, f_n)$ от $n$ многочленов $f_i \in V_k$ называется инвариантом, если

$$I(f_1 \circ A, \ldots, f_n \circ A) = I(f_1, \ldots, f_n)$$

для всякого набота $f_1, \ldots, f_n \in V_k$ и для всякого $A \in SL_2(\mathbb{R})$.

*Задача* 72. Дискриминант $D(f) = a_1^2 - 4a_0a_2$ является инвариантом квадратичной формы

$$a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2.$$

Проверьте.

Задача: найти инварианты однородных многочленов данной степени. Это очень классическая задача, ей занимались Сильвестр, Кэли, Сальмон и др.

**Сильвестр (1814–1897).** Это математик, получивший фундаментальные результаты в теории инвариантов, полилинейной алгебре, теории чисел и комбинаторике. Кстати, Сильвестру принадлежит термин “детерминант”. Кэли и Сильвестр - вот два самых знаменитых математика Викторианской Англии.

Джеймс Джозеф Сильвестр родился в семье купца Абрахама Джозефа. Джеймс взял фамилию Сильвестр, следуя примеру своего старшего брата, эмигрировавшего в США. Сильвестр сменил несколько школ и колледжей. Там он страдал от многочисленных конфликтов, в большой степени связанных с его еврейским происхождением.

По результатам выпускного математического экзамена в Кембридже, Сильвестр занял второе место (это очень серъезный традиционный экзамен, the tripos, в ходе которого студенты писали десятки экзаменационных работ, включавших сотни задач; при этом самый лучший результат мог быть порядка 50

процентов). Экзамен, в принципе, давал право на получение одновременно степеней бакалавра и магистра. Но Сильвестр не получил эти степени, так как отказался от соответствующей формальной процедуры, включавшей признание канонов англиканской церкви. (Отметим в скобках, что подобные трудности, и тоже в Кембридже, были у И. Ньютона: хотя и христианин, он придерживался неортодоксальных взглядов и не верил в догмат троицы). Научные степени Сильвестр получил только через 4 года, уже будучи профессором физики в лондонском University College.

Сразу после этого Сильвестр переехал в США, чтобы преподавать математику в университете Вирджинии. Там он не проработал и пяти месяцев. Причина ухода состояла в том, что его коллеги не поддержали его в стремлении выгнать одного студента.

После безуспешного поиска работы в США, Сильвестр вернулся в Англию, и стал работать актуарием. Только в 1855 году (т.е. в возрасте 40 лет) ему удалось получить постоянную академическую позицию в королевской военной академии в Вулвиче. Там, однако, приходилось много времени тратить на преподавание. Уже через 15 лет (в возрасте 55 лет) Сильвестр должен был выйти на пенсию. Интересным образом, рассвет математической карьеры Сильвестра пришелся на после-пенсионный возраст.

В 1877–1883 годах Сильвестр возглавлял отделение математики в американском Johns Hopkins University, основал "Американский Математический Журнал" (American Journal of Mathematics). С 1883 года до конца жизни Сильвестр руководил кафедрой геометрии в Оксфорде.

**Артур Кэли (1821–1895) (взято из википедии)**. Артур Кэли родился в Ричмонде (Лондон), Англия. Его отец Генри Кэли поселился торговцем в Санкт-Петербурге (Россия). Его мать, Мария Антония Доти, была дочерью Вильяма Доти. Согласно некоторым источникам, она была русской, хотя имя отца говорит об английском происхождении. Артур провел свои первые восемь лет в Санкт-Петербурге. В 1829 году его родители переехали в Блэкхис (англ. Blackheath) вблизи Лондона (ныне район Большого Лондона). Артур пошел в частную школу. В 14 лет он пошел в школу Кингс-колледж. Школьный учитель увидел в мальчике гения и посоветовал отцу не учить своему бизнесу, как он (отец) намеревался, а готовить к поступлению в Кембриджский университет.

В необыкновенно раннем возрасте 17 лет Кэли поступил в кембриджский Тринити-колледж. В то время Аналитическое общество (Analytical Society) процветало, и Грегори и Лесли Еллис основали Кембриджский математический журнал. В возрасте 20 лет Кэли передал этому журналу три рукописи на темы навеянные чтением Mecanique analytique Лагранжа и некоторыми работами Лапласа. Его наставником в кембридже был Джордж Пикок, а его личным наставником был Вильям Хопкинс. Кэли закончил свое студенческое образование лучшим студентом курса (англ. Senior Wrangler) и также получил первый из двух призов Смита, присуждаемых ежегодно за студенческие научные исследования. Его следующим шагом было получение степени Master of Arts (MA degree), и получение должности в университете по конкурсу. Он остался в Кембридже в течение 4 лет. В это время он взял себе несколько учеников, но его основной работой была подготовка 28 мемуаров для Кембриджского математического журнала.

В связи с тем, что его должность была с ограниченным сроком пребывания, было необходимо выбирать профессию. Кэли выбрал профессию адвоката, и в возрасте 25 лет стал членом лондонского судебного инна Линкольна. Он выбрал специальность связанную с транспортировкой. Когда он был учеником, и сдавал адвокатский экзамен, он ездил в Дублин слушать лекцию Гамильтона про кватернионы. Его друг Сильвестр был тогда актуарием. У них было привычкой гулять вместе вокруг судебного инна Линкольна, обсуждая теорию инвариантов и ковариантов. В течение этого периода его жизни, длящегося примерно 14 лет, Кэли выпустил от 200 до 300 работ.

В Кембриджском университете с давних времчн профессор чистой математики назывался Лукасовским профессором, эту должность некогда занимал Исаак Ньютон. Примерно в 1860 году несколько фондов, завещанных Лэди Сэдлер университету, стали бесполезными для их настоящей цели и были использованы для основания ещч одной именной профессуры. В обязанности Сэдлеровского профессора входило объяснять и обучать принципам чистой математики, и заниматься продвижением науки. На эту должность Кэли был избран, когда ему было 42 года. Он оставил доходную практику ради скромной зарплаты, но никогда об этом не жалел. Должность профессора позволила ему прекратить разделять верность к юриспруденции с верностью к математике и полностью заняться любимым делом. Сразу же после этого Кэли женился и поселился в Кембридже. Его друг и приятель, исследователь Сильвестр, однажды отметил, что Кэли более удачлив, чем он сам; они оба были холостяками и вместе жили в Лондоне, но Кэли женился и поселился в Кембридже с его тихой и мирной жизнью, а Сильвестр так и не женился и сражался со всем миром всю свою жизнь.

Явные конструкции многих инвариантов основаны на следующем наблюдении.

*Задача* 73. При замене координат из $SL_2(\mathbb{R})$, вектор $(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})$ преобразуется так же, как вектор $(x, y)$

Действительно, рассмотрим произвольную матрицу $A \in SL_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда обратную матрицу можно найти из соотношения $A + A^{-1} = \mathrm{tr}(A)$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при замене координат, соответствующей матрице $A$, мы можем выразить как новые координаты через старые, так и

старые координаты через новые:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{x} & = & ax+by \\ \tilde{y} & = & cx+dy \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} x & = & d\tilde{x}-b\tilde{y} \\ y & = & -c\tilde{x}+a\tilde{y} \end{array}$$

В частности, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{y}} = \frac{\partial x}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial}{\partial y} = a\frac{\partial}{\partial y} + b(-\frac{\partial}{\partial x}),$$

$$-\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} = -\frac{\partial x}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial}{\partial y} = c\frac{\partial}{\partial y} + d(-\frac{\partial}{\partial x}).$$

Таким образом, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $-\frac{\partial}{\partial x}$ преобразуются точно так же, как $x$ и $y$, что и требовалось доказать.

Из этого наблюдения вытекает такое важное следствие: форма

$$\langle f,g\rangle = f(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})g(x,y) \in \mathbb{R}$$

является инвариантом (заметим, что в правой части стоит результат применения дифференциального оператора порядка $k$ к многочлену степени $k$, то есть число).

Пример. Пусть $f(x,y)$ — квадратичная форма

$$a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2.$$

Тогда число $\langle f,f\rangle$ совпадает с точностью до знака с дискриминантом формы $f$:

$$\langle f,f\rangle = (a_0\partial_y^2 - a_1\partial_x\partial_y + a_2\partial_x^2)f(x,y) =$$
$$= 2a_0a_2 - a_1^2 + 2a_0a_2 = 4a_0a_2 - a_1^2.$$

**Теорема 18.** *Для четных $k$, форма $\langle f,g\rangle$ симметрична, а для нечетных — кососимметрична. Для всех $k$, эта форма невырождена.*

*Доказательство.* Пусть

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{k} a_ix^{k-i}y^i, \quad g(x,y) = \sum_{j=0}^{k} b_jx^{k-j}y^j.$$

Тогда

$$\langle f,g\rangle = \left(\sum a_i\partial_y^{k-i}(-\partial_x)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{k} b_jx^{k-j}y^j\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i i!(k-i)!a_ib_{k-i}.$$

□

Таким образом, для нечетных $k$ получаем инвариантную симплектическую структуру на $V_k$. Напишем явно соответствующую симплектическую форму для случая $n = 3$. Пусть

$$f(x, y) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3,$$
$$g(x, y) = b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3.$$

Тогда

$$\langle f, g\rangle = 6(a_0b_3 - a_3b_0) - 2(a_1b_2 - a_2b_1).$$

11.3. **Стандартная симплектическая структура на $\mathbb{C}^n$.** Рассмотрим евклидову метрику $(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{C}^n$, инвариантную относительно умножения на $i$ (такая метрика называется *эрмитовой метрикой*). Эрмитова метрика задает симплектическую форму

$$[\xi, \eta] = (\xi, i\eta).$$

Часто рассматривают также *эрмитову форму*

$$\langle \xi, \eta\rangle = (\xi, \eta) + i[\xi, \eta],$$

которая полуторалинейна и сопряженно-симметрична.

Пусть $(z_1, \ldots, z_n)$ — система координат на $\mathbb{C}^n$, в которой рассматриваемая евклидова метрика имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} dz_j d\overline{z_j}.$$

Тогда соответствующую симплектическую форму можно записать так:

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z_j} = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j,$$

где $z_j = x_j + iy_j$.

*Задача* 74. Проверьте эту формулу.

11.4. **Симплектическая структура на $\mathbb{C}P^n$.** Пусть

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n+1} dz_j \wedge d\overline{z_j} = \sum_{j=1}^{n+1} dx_j \wedge dy_j$$

— стандартная симплектическая структура на $\mathbb{C}^{n+1}$, введенная выше. Рассмотрим ограничение формы $\omega$ на единичную сферу $S^{2n+1}$, заданную уравнением

$$\sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 = 1.$$

Мы воспользуемся следующим общим фактом из линейной алгебры:

**Теорема 19.** *Если $\omega$ — невырожденная билинейная кососимметрическая форма на пространстве $\mathbb{R}^{2n+2}$, то ее ограничение на любую гиперплоскость имеет одномерное ядро.*

*Задача* 75. Докажите эту теорему.

В частности, ограничение формы $\omega$ на касательное пространство к $S^{2n+1}$ одномерно. Мы можем найти явно это одномерное ядро.

**Теорема 20.** *Пусть $Z = (Z_0, \dots, Z_n) \in S^{2n+1}$. Тогда вектор $iZ = (iZ_0, \dots, iZ_n) \in T_Z S^{2n+1}$ лежит в ядре ограничения формы $\omega$ на касательное пространство $T_Z S^{2n+1}$.*

*Доказательство.* Пусть $W$ — касательный вектор к $S^{2n+1}$ в точке $Z$. Тогда $(W, Z) = 0$, то есть $W$ ортогонален вектору $Z$ относительно стандартного евклидова скалярного произведения. По определению формы $\omega$, имеем

$$\omega(iZ, W) = [iZ, W] = (iZ, iW) = (Z, W) = 0.$$

Поскольку вектор $W$ произвольный, отсюда вытекает, что вектор $iZ$ лежит в ядре ограничения формы $\omega$ на касательное пространство к сфере $S^{2n+1}$. □

Поскольку ядро одномерно, оно порождается вектором $iZ$.

Заметим, что $\mathbb{C}P^n$ можно рассмативать как факторпространство $S^{2n+1}/S^1$, где $S^1$ действует по формуле

$$e^{i\phi}(Z_0, \dots, Z_n) = (e^{i\phi} Z_0, \dots, e^{i\phi} Z_n).$$

**Теорема 21.** *Касательное пространство к $\mathbb{C}P^n$ в точке с однородными координатами $[Z_0 : \dots : Z_n]$ естественным образом отождествляется с факторпространством*

$$T_Z S^{2n+1}/\langle iZ \rangle, \quad \text{где} \quad Z = (Z_0, \dots, Z_n).$$

*На этом факторпространстве определена невырожденная билинейная кососимметрическая форма $\tilde{\omega}$, такая, что $\tilde{\omega}(\xi, \eta)$ равно $\omega(V, W)$, где $V$ и $W$ — какие-то прообразы векторов $\xi$ и $\eta$ при отображении факторизации.*

В проверке нуждается только утверждение о естественном изоморфизме между касательным пространством к $\mathbb{C}P^n$ и указанным факторпространством. Пусть $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ — каноническая проекция, сопоставляющая точке $Z = (Z_0, \dots, Z_n)$ на единичной сфере точку с однородными координатами $[Z_0 : \dots : Z_n]$ в $\mathbb{C}P^n$.

Нетрудно проверить, что отображение $\pi$ гладкое (например, достаточно записать его в локальных координатах). Следовательно, определено касательное отображение к $\pi$ (=дифференциал отображения $\pi$)

$$\pi_* : TS^{2n+1} \to T\mathbb{C}P^n.$$

Ядро отображения $\pi_*$, ограниченного на касательное пространство к сфере в точке $Z$, совпадает с прямой, натянутой на вектор $iZ$ (действительно, этот вектор касается орбиты точки $Z$ при действии окружности скалярными умножениями; чтобы в этом убедиться, достаточно продифференцировать $(e^{i\phi}Z_0, \ldots, e^{i\phi}Z_n)$ по $\phi$ при $\phi = 0$). Таким образом, отображение $\pi_*$ определяет искомый изоморфизм

$$T_Z S^{2n+1}/\langle iZ\rangle \cong T_{\pi(Z)}\mathbb{C}P^n.$$

Теперь в каждой точке комплексного проективного пространства определена невырожденная билинейная кососимметрическая форма $\tilde{\omega}$ на касательных векторах к данной точке. В локальной системе координат нетрудно проверить, что коэффициенты формы $\tilde{\omega}$ зависят гладко от точки. Таким образом, $\tilde{\omega}$ — это дифференциальная 2-форма на многообразии $\mathbb{C}P^n$. Формы $\omega$ и $\tilde{\omega}$ связаны при помощи отображения $\pi$ следующим образом:

$$\omega|_{S^{2n+1}} = \pi^*(\tilde{\omega})$$

(напомним, что дифференциальные формы переносятся назад). Чтобы доказать, что $\tilde{\omega}$ является симплектической структурой, нам теперь достаточно проверить, что $d\tilde{\omega} = 0$. Действительно, имеем:

$$0 = d\omega = d\pi^*\tilde{\omega} = \pi^*(d\tilde{\omega})$$

(в силу функториальности внешнего дифференцирования, операция $\pi^*$ коммутирует с операцией $d$). Однако отображение $\pi^*$ на дифференциальных формах инъективно (докажите! это следует из того, что отображение $\pi_*$ на векторах сюръективно). Следовательно, $d\tilde{\omega} = 0$.

## 12. Домашнее задание: примеры симплексических структур

*Задача* 76. Пусть $L_1$ и $L_2$ — комплексные прямые в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящие через 0, а $S^{2n+1}$ — единичная сфера, заданная уравнением

$$\sum_{j=0}^{n} |Z_j|^2 = 1.$$

Рассмотрим окружности $S_1 = S^{2n+1} \cap L_1$ и $S_2 = S^{2n+1} \cap L_2$. Докажите, что евклидово расстояние от точки $x \in S_1$ до ближайшей точки окружности $S_2$ не зависит от выбора точки $x$.

*Задача* 77. Пусть $(\cdot,\cdot)$ — евклидово скалярное произведение на $\mathbb{C}^{n+1}$, инвариантное относительно умножения на $i$. Докажите, что форма $[Z,W] = (Z,iW)$ является симплектической формой на $\mathbb{C}^{n+1}$, и что форма $\langle Z,W\rangle = (Z,W) + i[Z,W]$ является эрмитовой формой, то есть $\langle Z,W\rangle = \overline{\langle W,Z\rangle}$ и

$$\langle \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2, W\rangle = \lambda_1\langle Z_1,W\rangle + \lambda_2\langle Z_2,W\rangle, \qquad \forall\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C},$$

а также что $\langle Z,Z\rangle = (Z,Z)$.

*Задача* 78. Пусть $(\cdot,\cdot)$ — стандартное евклидово скалярное произведение на $\mathbb{C}^{n+1}$, то есть $(Z,Z) = \sum |Z_j|^2$. Рассмотрим произвольный вектор $W \in \mathbb{C}^{n+1}$. Докажите, что вектор $p_Z(W) = W - \langle W,Z\rangle Z$ ортогонален как вектору $Z$, так и вектору $iZ$.

*Задача* 79. Рассмотрим каноническую проекцию $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$. Постройте канонический изоморфизм между касательным пространством к $\mathbb{C}P^n$ в точке $\pi(Z)$ и пространством $p_Z(\mathbb{C}^{n+1})$. В дальнейших задачах мы будем отождествлять эти два пространства при помощи построенного изоморфизма.

*Задача* 80. Определим евклидово скалярное произведение $g_q(\cdot,\cdot)$ на $T_q\mathbb{C}P^n$ как ограничение стандартного евклидового скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на $p_Z(\mathbb{C}^{n+1})$, где $q = \pi(Z)$. Это скалярное произведение инвариантно относительно умножения на $i$. Обозначим соответствующую симплектическую форму на $T_q\mathbb{C}P^n$ через $\tilde\omega_q$. Таким образом, определена 2-форма $\tilde\omega$ на $\mathbb{C}P^n$. Докажите, что эта форма совпадает с симплектической структурой на $\mathbb{C}P^n$, построенной на лекции.

*Задача* 81. При замене координат из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, вектор $(\partial_y, -\partial_x)$ преобразуется так же, как вектор $(x,y)$. Другими словами,

$$\text{если} \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde x &=& ax+by \\ \tilde y &=& cx+dy \end{array} \right., \quad \text{то} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial\tilde y} &=& a\partial_y + b(-\partial_x) \\ -\frac{\partial}{\partial\tilde x} &=& c\partial_y + d(-\partial_x) \end{array} \right.,$$

для любых $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$, таких, что $ad - bc = 1$.

*Задача* 82. Гессианом функции $p(x,y)$ называется определитель

$$Hess(p) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Если $p$ — однородный многочлен степени 3, то его гессиан является квадратичной формой. Как эта форма меняется при заменях координат из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$? Верно ли, что дискриминант этой формы является инвариантом многочлена $p$?

## 13. Лекция: канонический формализм

В этой лекции, мы будем обсуждать уравнения Гамильтона на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой. Мы обсудим методы сведения одних гамильтоновых систем к другим, а также методы решения гамильтоновых систем. Обозначим координаты в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ через $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Мы будем писать $(p, q)$, имея в виду точку с координатами

$$(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n).$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

или, короче

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Мы раньше определили функцию действия $S_{q_0}(q, t)$ как интеграл от лагранжиана вдоль истинной траектории, соединяющей точку $q_0$ с точкой $q$ за время $t$. Мы видели, что $dS = p\,dq - H\,dt$, где $p\,dq$ означает сумму

$$p\,dq = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n.$$

Отсюда сразу же вытекает уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = 0.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби было навеяно аналогией с геометрической оптикой (это уравнение соответствует уравнению эйконала), и осуществляет связь между теорией гамильтоновых систем (частный случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений) и теорией уравнений с частными производными первого порядка. Мы будем использовать связь в обе стороны.

Рассмотрим 1-форму $p\,dq - H\,dt$ на расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ (последняя координата в этом пространстве обозначается через $t$ и имеет смысл времени). Эта форма не совпадает с $dS$, т.к. последняя форма определена на расширенном конфигурационном, а не на расширенном фазовом пространстве. Однако верно следующее: любая истинная траектория, выходящая в момент

времени $t = 0$ из точки $q_0$ (фигурирующей в определении функции действия $S = S_{q_0}$), однозначно поднимается до траектории соответствующей гамильтоновой системы в расширенном фазовом пространстве (импульсы однозначно вычисляются по скоростям), и интеграл от $dS$ на любом отрезке этой исходной траектории совпадает с интегралом от $p\,dq - H\,dt$ на соответствующем отрезке поднятой траектории.

Начиная с этого момента, мы можем будем допускать явную зависимость функции гамильтона от времени, т.е. будем считать, что $H$ — функция на расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$. Скажем, что 2-форма $\omega$ на пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ неособа, если ее ядро имеет минимальную возможную размерность, т.е. 1. Пусть теперь 1-форма $\theta$ на $\mathbb{R}^{2n+1}$ такова, что форма $d\theta$ неособа. Тогда ядро формы $d\theta$ задает поле направлений, инвариантно связанное с формой $\theta$ (оно называется полем характеристических направлений). Интегральные кривые поля характеристических направлений называются характеристиками формы $\theta$.

Пусть $\gamma_1$ — некоторая гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Выпустим характеристику из каждой точки этой кривой. Предположим, что выпущенные характеристики не пересекаются, по крайней мере в близи к кривой $\gamma_1$ (для этого достаточно предположить, что кривая $\gamma_1$ нигде не касается поля характеристик). Тогда характеристики, выпущенные из точек кривой $\gamma_1$, заметают некоторую поверхность, называемую трубкой характеристик (точее, трубка характеристик определена только в некоторой окрестности кривой $\gamma_1$). Пусть $\gamma_2$ — другая кривая, охватывающая ту же трубку характеристик (и не пересекающая кривую $\gamma_1$). Тогда

$$\int_{\gamma_1} \theta = \int_{\gamma_2} \theta.$$

Это вытекает из теоремы Стокса. Действительно, пусть $\Gamma$ — участок трубки характеристик, заключенный между кривыми $\gamma_1$ и $\gamma_2$. Поскольку $\Gamma$ состоит из характеристик, ограничение формы $d\theta$ на $\Gamma$ тождественно равно нулю (один из касательных векторов, которые мы подставляем в форму $d\theta$, лежит в ядре этой формы). С другой стороны, по теореме Стокса, интеграл по $\Gamma$ от $d\theta$ (равный нулю) равен разности интегралов от $\theta$ по $\gamma_1$ и по $\gamma_2$.

**Теорема 22.** *Характеристики формы $\theta = p\,dq - H\,dt$ на $\mathbb{R}^{2n+1}$ совпадают с интегральными кривыми системы уравнений Гамильтона*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

*Доказательство.* Допустим для простоты, что $n = 1$ (общий случай отличается лишь дополнительным значком суммирования). Нам нужно доказать, что вектор $v$ с координатами $(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}, 1)$ лежит в ядре формы

$$d\theta = d(p\,dq - H\,dt) = dp \wedge dq - dH \wedge dt.$$

Действительно, пусть $w = (x, y, z)$ — любой другой вектор. Имеем:

$$d\theta(v, w) = -\frac{\partial H}{\partial q}y - \frac{\partial H}{\partial p}x - (\frac{\partial H}{\partial p}x + \frac{\partial H}{\partial q}y + \frac{\partial H}{\partial t}z) \cdot 1 + \frac{\partial H}{\partial t}z = 0.$$

□

Доказанная теорема дает способ выписывать уравнения движения в при произвольном выборе системы координат в фазовом пространстве. Действительно, как бы ни записывалась форма $\theta$ в других координатах, нам нужно найти поле характеристик этой формы. Допустим, например, что в некоторой системе координат $(P, Q, T)$ форма $\theta$ имеет вид

$$\theta = P\,dQ - K\,dT + dS.$$

Тогда характеристики формы $\theta$ удовлетворяют уравнениям гамильтона

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}.$$

В самом деле, $dS$ не влияет на характеристики (т.к. $d(dS) = 0$), и теперь достаточно применить доказанную теорему к форме $P\,dQ - K\,dT$, где вместо $p$ написано $P$, всесто $q$ написано $Q$, вместо $t$ написано $T$, и вместо $H$ написано $K$.

Напомним, что диффеоморфизм $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ называется каноническим преобразованием, если $g^*\omega = \omega$, где $\omega = dp \wedge dq$. Мы уже видели, что преобразование, осуществляемое фазовым потоком за время $t$, каноническое. Это вытекает и из того факта, что интеграл от формы $\theta$ вдоль кривых, охватывающих одну и ту же трубку характеристик, один и тот же. Рассмотрим кривую $\gamma_1$ лежащую в гиперплоскости $t = t_0$, а также кривую $\gamma_2$, лежащую в гиперплоскости $t = t_1$ и охватывающую ту же самую трубку характкристик формы $\theta$ (то есть трубку истинных траекторий нашей гамильтоновой системы). Мы знаем, что

$$\int_{\gamma_1} \theta = \int_{\gamma_2} \theta.$$

С другой стороны,

$$\int_{\gamma_1} \theta = \int_{\gamma_1} p\,dq,$$

и то же самое для второго интеграла, поскольку $dt = 0$ на рассматриваемой гиперплоскости. Мы заключаем, что интегралы от формы $p\,dq$ по замкнутым кривым, получающимся друг из друга преобразованием фазового потока, совпадают. По теореме Стокса, отсюда вытекает, что интегралы от формы $\omega = d(p\,dq)$ по любым двумерным площадкам, получающимся друг из друга преобразованием фазового потока, совпадают. Но это значит, что $g^*\omega = \omega$ для любого преобразования $g$ фазового потока.

**Теорема 23.** *При каноническом преобразовании, форма уравнений Гамильтона не меняется. Точнее говоря, если $g$ — каноническое преобразование, и $(P, Q) = g(p, q)$, то траектории уравнения Гамильтона $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, $\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p}$ переводятся преобразованием $g$ в траектории уравнения Гамильтона*

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P},$$

*где $\tilde{H} = H \circ g^{-1}$.*

*Доказательство.* С одной стороны, это утверждение очевидно. Действительно, гамильтоново векторное поле (даже зависящее от времени) определяется только исходя из 2-формы $\omega$ и функции $H$, не используя систему координат. Поэтому в любой другой системе координат оно будет определяться теми же формулами, если только форма $\omega$ записывается той же формулой.

С другой стороны, мы можем дать более прямое доказательство, которое к тому же нам пригодится для определения производящих функций. Рассмотрим 1-форму $P\,dQ - p\,dq$. Эта форма замкнута (ее дифференциал равен $g^*\omega - \omega = 0$), а значит, точна:

$$P\,dQ - p\,dq = dS$$

для некоторой функции $S$. Следовательно, в новой системе координат $(P, Q, t)$ (координата $t$ не менялась) форма $\theta$ имеет вид $P\,dQ - \tilde{H}\,dt + dS$. Как мы видели, характеристики этой формы задаются уравнениями Гамильтона с гамильтонианом $\tilde{H}$. $\square$

## 14. Лекция: метод Гамильтона–Якоби

Мы обсудим более подробно, как свзязаны задача интегрирования уравнения в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0$$

(называемого уравнением Гамильтона–Якоби), и задача интегрирования гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Оказывается, эта связь может быть эффективно использована в обе стороны. Во-первых, задача решения уравнения Гамильтона–Якоби сводится к интегрированию соответствующей гамильтоновой системы. Это мы обсудим чуть позже. А сейчас мы увидим, как помогает умение решать уравнение Гамильтона–Якоби (точнее, умение находить достаточно много в некотором смысле независимых решений) при изучении гамильтоновых систем. Конечно, далеко не всякую гамильтонову систему и далеко не всякое уравнение типа Гамильтона–Якоби можно решить явно.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(p, q)$ и стандартной симплектической структурой $\omega = dp \wedge dq$. Пусть $g(t) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — зависящее от времени каноническое преобразование. Обозначим координаты точки $g(t)(p, q)$ через $P(p, q, t)$ и $Q(p, q, t)$. Рассмотрим 1-форму $p\,dq - P\,dQ$ на $\mathbb{R}^{2n}$, зависящую от времени (подчеркнем, что это именно 1-форма на фазовом пространстве, коэффициенты которой зависят от времени, а не 1-форма на расширенном фазовом пространстве, то есть никаких членов с $dt$ в этой форме нет, а $dQ$ равно $\frac{\partial Q}{\partial p}dp + \frac{\partial Q}{\partial q}dq$). Поскольку рассматриваемая форма замкнута, она является дифференциалом некоторой функции $S_t$ (зависящей от $t$ как от параметра):

$$p\,dq - P\,dQ = dS_t.$$

Эта функция определена только с точностью до постоянной интегрирования, но можно, например, зафиксировать точку $(p_0, q_0)$, и положить

$$S_t(p, q) = \int_{(p_0,q_0)}^{(p,q)} p\,dq - P\,dQ$$

при любом фиксированном $t$ (выражение под интегралом зависит от $t$ как от параметра!). Интеграл берется по произвольной гладкой кривой, соединяющей точку $(p_0, q_0)$ с точкой $(p, q)$, и от выбора кривой не зависит (поскольку интеграл замкнутой формы по любой замкнутой кривой равен нулю).

Положим

$$S(p,q,t) = -S_t(p,q)$$

и будем рассматривать эту функцию как функцию на расширенном фазовом пространстве. В частности, в полный дифференциал

$$dS = \frac{\partial S}{\partial p}dp + \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial t}dt = -dS_t + \frac{\partial S}{\partial t}dt$$

будет входить член с $dt$. Получаем

$$p\,dq - H\,dt = P\,dQ - K\,dt + dS, \tag{1}$$

где

$$K = H - \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Функция $S$ называется производящей функцией канонического преобразования $g(t)$.

Предположим, что функцию $S$ можно выразить как функцию от $q$ и $Q$, то есть существует функция $S_1(q,Q,t)$, такая, что

$$S(p,q,t) = S_1(q, Q(p,q,t), t).$$

В этом случае каноническое преобразование называется свободным, а функция $S_1$ называется производящей функцией свободного канонического преобразования. Следует понимать, что функция $S_1$ определена не на фазовом пространстве, а на прямом произведении двух конфигурационных пространств.

Выразим все выражения, фигурирующие в формуле (1), через $q$ и $Q$. Получим

$$dS_1 = p\,dq - P\,dQ - (H-K)dt.$$

Отсюда мы получаем выражения для частных производных функции $S_1$:

$$\frac{\partial S_1}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S_1}{\partial Q} = -P, \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} = K - H. \tag{2}$$

Мы знаем, что в координатах $(P,Q)$, интегральные кривые исходной гамильтоновой системы удовлетворяют тоже гамильтоновым уравнениям с гамильтонианом $K$. Если гамильтониан равен тождественно нулю, то решение соответсвующей гамильтоновой системы не представляет труда (все решения постоянные, то есть не зависят от времени). Поэтому мы хотим подобрать такое каноническое преобразование $g(t)$, после которого гамильтониан $K$ будет равен 0.

Как видно из уравнений (2), производящая функция $S_1$ такого канонического преобразования должна удовлетворять уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + H(\frac{\partial S_1}{\partial q}, q, t) = 0.$$

Заметим, что координаты $Q$ являются в этом уравнении параметрами. Таким образом, задача нахождения канонического преобразования с указанными свойствами сводится к задаче нахождения достаточно большого числа решений уравнения Гамильтона–Якоби. Точнее, семейства решений, зависящих от параметров $Q$ достаточно невырожденным образом. Еще точнее, зависимость от параметров $Q$ должна быть такой, чтобы уравнение

$$\frac{\partial S_1}{\partial Q} = -P$$

можно было разрешить относительно $q$ (по крайней мере локально). Для локальной разрешимости этого уравнения, достаточно потребовать, чтобы определитель матрицы $\frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial Q}$ был отличен от нуля. Это вытекает из теоремы об обратной функции.

Допустим, что мы нашли такое семейство решений уравнения Гамильтона–Якоби $S_1(q, Q, t)$. Решения гамильтоновой системы в координатах $(P, Q)$ имеют вид $P = P_0 = const$, $Q = Q_0 = const$. Функции $q(t)$ мы находим, решая систему

$$\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q(t), Q_0, t) = -P_0.$$

(мы предположили, что эту систему можно решить). Наконец, функции $p(t)$ находим по формуле

$$p(t) = \frac{\partial}{\partial q} S_1(q(t), Q_0, t).$$

В случае, когда гамильтониан не зависит от времени, метод несколько упрощается. В этом случае достаточно рассмотреть каноническое преобразование $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, не зависящее от времени. Обозначим координаты точки $g(p, q)$ через $P(p, q)$ и $Q(p, q)$. Мы знаем, что

$$p\, dq - P\, dQ = dS,$$

где $S = S(p, q)$ — функция на фазовом пространстве, не зависящая от времени. Как и раньше, предположим, что эту функцию можно выразить через координаты $q$ и $Q$:

$$S(p, q) = S_1(q, Q(p, q)).$$

Частные производные функции $S_1$ равны

$$\frac{\partial S_1}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S_1}{\partial Q} = -P.$$

Новый гамильтониан совпадает со старым, только его нужно записать в новых координатах. Конечно, никаким выбором системы координат мы не добьемся того, чтобы ненулевой гамильтониан стал нулевым. Однако, во многих случаях можно так сделать, чтобы новый гамильтониан зависел только от $Q$ и не зависел от $P$:

$$K = K(Q) \quad (= H(p, q))$$

Уравнения Гамильтона с таким гамильтонианом тоже легко решаются:

$$Q = Q_0, \quad P = -\int \frac{\partial K}{\partial Q}(Q_0)dt = \frac{\partial K}{\partial Q}(Q_0)(t_0 - t).$$

Осталось найти производящую функцию $S_1$. Она удовлетворяет такому упрощенному варианту уравнения Гамильтона–Якоби:

$$H\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}, q\right) = K = const$$

(будем называть это уравнение стационарным уравнением Гамильтона–Якоби). Как и раньше, координаты $Q$ входят в это уравнение только как параметры. Если мы найдем решение этого уравнения, зависящее от параметров таким образом, что уравнение $\frac{\partial S_1}{\partial Q} = -P$ можно будет разрешить относительно $q$, то решение исходной гамильтоновой системы может быть найдено явно. Именно, $q(t)$ находится из уравнения

$$\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q(t), Q_0, t) = -P(t) = \frac{\partial K}{\partial Q}(Q_0)(t - t_0),$$

а $p(t)$ находится по формуле

$$p(t) = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q(t), Q_0, t).$$

## 15. Семинар: метод Гамильтона–Якоби

Рассмотрим задачу Кеплера. Гамильтониан в задаче Кеплера можно записать в полярных координатах следующим образом:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha}{r}.$$

Стационарное уравнение Гамильтона–Якоби выглядит так:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right)-\frac{\alpha}{r}=K=const.$$

Мы здесь пишем $S$ вместо $S_1$, чтобы немного упростить обозначения. Положим $Q_1=K$. Естественно искать такие решения выписанного уравнения, для которых

$$\frac{\partial S}{\partial \phi}=Q_2=const.$$

Для таких функций $S$, имеем

$$S=Q_2\phi+f(r),$$

где функция $f$ удовлетворяет такому обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$f'(r)^2+\frac{Q_2^2}{r^2}=2m\left(Q_1+\frac{\alpha}{r}\right).$$

Получаем

$$f(r)=\int dr\sqrt{2m\left(Q_1+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{Q_2^2}{r^2}}.$$

Теперь $r(t)$, $\phi(t)$ находятся из следующих формул:

$$\frac{\partial S}{\partial Q_1}=\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2m\left(Q_1+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{Q_2^2}{r^2}}}=t-t_0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial Q_2}=\phi-\int\frac{Q_2\,dr/r^2}{\sqrt{2m\left(Q_1+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{Q_2^2}{r^2}}}=\phi_0.$$

Осталось только взять интегралы и решить уравнения.

Обсудим еще один пример из геометрии. Пусть на некоторой поверхности (например, на открытом подмножестве в $\mathbb{R}^2$) задан лагранжиан, являющийся квадратичной формой от скоростей (коэффициенты этой квадратичной формы, конечно, могут зависеть от координат). Более того, предположим, что эта квадратичная форма от скоростей положительно определена. Тогда она называется римановой метрикой. Другими словами, риманова метрика — это положительно определенная квадратичная форма, определенная на каждой касательной плоскости к поверхности, и гладко зависящая от точки. В каждой отдельной точке, эту квадратичную форму можно привести к сумме квадратов. Таким образом, в каждой отдельно взятой касательной плоскости имеется естественная

евклидова структура. Правда, эти структуры не склеиваются, вообще говоря, в евклидову структуру на всей поверхности (имеется инвариант, называемый кривизной, который измеряет отклонение римановой метрики от евклидовой). Но в любом случае, у каждого касательного вектора определена длина, а следовательно, можно говорить о длинах гладких кривых. Геодезическими называются траектории лагранжиана, совпадающего с римановой метрикой. Можно показать, что геодезические являются локально кривыми минимальной длины. Глобально, это может быть не верно.

Применим метод Гамильтона–Якоби для нахождения геодезических такой риамновой метрики:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (A_1 - A_2)(B_1\dot{q}_1^2 - B_2\dot{q}_2^2).$$

Здесь $A_1$ и $B_1$ — это функции только от $q_1$, а $A_2$ и $B_2$ — это функции только от $q_2$. Выписанная метрика называется метрикой Лиувилля. Многие метрики, встречающиеся в практических вычислениях, являются метриками Лиувилля, но чтобы это увидеть, нужно, вообще говоря, перейти к другой системе координат.

Чтобы найти геодезические в метрике Лиувилля, нужно сначала перейти от лагранжиана к гамильтониану при помощи преобразования Лежандра. Получаем

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{A_1 - A_2}\left(\frac{p_1^2}{B_1} - \frac{p_2^2}{B_2}\right).$$

Уравнение Гамильтона–Якоби имеет такой вид:

$$\frac{1}{B_1}\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 - \frac{1}{B_2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 = 2K(A_1 - A_2).$$

Можно перенести в левую часть, все члены, содержащие $q_1$, а в правую часть — все члены, содержащие $q_2$:

$$\frac{1}{B_1}\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 - 2KA_1 = \frac{1}{B_2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 - 2KA_2.$$

Раз левая часть не зависит от $q_2$, а правая часть не зависит от $q_1$, то обе части не зависят ни от $q_1$, ни от $q_2$, то есть обе части константы. Точнее, одна и та же константа. Обозначим эту константу через $Q_2$, а за $Q_1$ примем, как и раньше, $K$. Интегрируя полученные уравнения, получаем:

$$S = \int \sqrt{B_1(2Q_2A_1 + Q_1)}dq_1 + \int \sqrt{B_2(2Q_2A_2 + Q_1)}dq_2.$$

Теперь уравнения геодезических находятся из системы

$$\frac{\partial S}{\partial Q_1} = -P_1 = const, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_2} = t - t_0.$$

Обычная метрика на эллипсоиде, являющаяся ограничением на эллипсоид стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^3$, является метрикой Лиувилля. Указанный вид она примет в эллиптической системе координат. В этой системе координат, координатными поверхнотями (т.е. поверхностями, на которых одна из координат постоянна) являются квадрики, софокусные данному эллипсоиду. Почти через всякую точку проходит три такие квадрики, они взаимно перпендикулярны.

## 16. Гамильтонова механика и уравнения с частными производными

Идеи гамильтоновой механики помогают решать уравнения с частными прозводными. Начнем с уже знакомого примера — уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0.$$

Это уравнение можно решить, интегрируя соответствующую гамильтонову систему. Прежде, чем обсуждать это подробно, отметим, что уравнение Гамильтона–Якоби не является чем-то очень специальным. Функция $H$ — это гамильтониан, но гамильтониан может быть почти произвольной функцией. По крайней мере, гамильтонову систему можно решать вообще для любого гамильтонина. Правда, для решения уравения Гамильтона–Якоби, нам понадобится перейти от гамильтониана к лагранжиану, а это требует некоторых условий (преобразование Лежандра определено не для всех функций). Что это за условия, мы уже обсуждали. Может показаться, что наличие члена $\frac{\partial S}{\partial t}$ выделяет узкий класс уравнений первого порядка. Но это тоже не так. Почти любое уравнение первого порядка на функцию $S(q,t)$, не содержащее явной зависимости от $S$, можно разрешить относительно производной $\frac{\partial S}{\partial t}$ (по крайней мере, в принципе — явной формулы для решения может и не быть). Таким образом, уравнения Гамильтона–Якоби — это почти то же самое, что уравнения с частными производными первого порядка, не содержащие явной зависимости от $S$ (т.е. уравнения, связывающие значения переменных $q$ со значениями частных производных функции $S$, но не со значением самой функции $S$).

Обсудим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби: Дана функция $S_0(q)$. Найти решение $S(q,t)$ уравнения Гамильтона–Якоби, которое удовлетворяет начальному условию $S(q,0) = S_0(q)$. Эта задача вполне аналогична задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. На самом деле, можно даже интерпретировать уравнение Гамильтона–Якоби как обыкновенное дифференциальное уравнение, но в бесконечномерном фазовом пространстве. Фазовое пространство — это пространство всех достаточно гладких функций от $q$. Частная производная $\frac{\partial S}{\partial t}$ может быть понята как скорость точки в нашем бесконечномерном фазовом пространстве. К сожалению, обычная теория обыкновенных дифференциальных уравнений не работает для бесконечномерных фазовых пространств. Например, теорема существования и единственности очень часто нарушается.

Обсудим теперь более подробно, как решать задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби при условии, что мы можем проинтегрировать соответсвующую гамильтонову систему.

1. Решим соответствующую гамильтонову систему

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

с произвольными начальными условиями $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$.

2. Найдем функцию Лагранжа $L(q,\dot{q},t)$ как преобразование Лежандра от функции Гамильтона.

3. Рассмотрим произвольную точку $q_0$ и положим $p_0 = \frac{\partial S_0}{\partial q}(q_0)$. Пусть $q(t)$ — найденная в п.1 траетория. Тогда

$$S(q(t),t) = S_0(q_0) + \int_0^t L(q(\tau),\dot{q}(\tau),\tau)\,d\tau.$$

Эта формула задает решение (неявно), т.к. всякая точка $(q,t)$ (скажем, достаточно близкая к гиперповерхности $t = 0$) имеет вид $(q(t),t)$ при некотором выборе начального условия $q_0$. Разберем конкретный пример.

Пример. Решить задачу Коши

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{a}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0, \quad S(x,0) = \frac{bx^2}{2}.$$

Имеем:

$$H = \frac{ap^2}{2}, \quad L = \frac{\dot{x}^2}{2a}.$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{x} = ap$$

и легко решаются:

$$p = p_0, \quad x = ap_0 t + x_0.$$

С другой стороны, по формуле $p_0 = \frac{\partial S_0}{\partial q}(q_0)$, имеем $p_0 = bx_0$. Следовательно,

$$x = x_0 + abx_0 t, \quad x_0 = \frac{x}{1 + abt}.$$

Имеем:

$$S(x,t) = \frac{bx_0^2}{2} + \int_0^t \frac{ap_0^2}{2} d\tau = \frac{bx_0^2}{2} + \frac{ab^2 x_0^2 t}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{x^2}{1+abt}\right).$$

Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что эта функция действительно решает данную задачу Коши.

Пользуясь похожими идеями, обсудим более простой случай линейного уравнения

$$a_1 \frac{\partial S}{\partial q_1} + \cdots + a_n \frac{\partial S}{\partial q_n} = 0,$$

в котором $a_i$ — это функции от координат $q_1, \ldots, q_n$. Рассмотрим векторное поле $A$ с координатами $(a_1, \ldots, a_n)$:

$$A = a_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial q_n}.$$

Тогда, очевидно, выписанное уравнение имеет вид $AS = 0$. Оно говорит о том, что функция $S$ постоянна вдоль интегральных кривых векторного поля $A$. Таким образом, чтобы решить уравнение $AS = 0$ с частными производными, нам достаточно решить систему $\dot{q} = A$ обыкновенных дифференциальных уравнений, а потом положить функцию $S$ равной константе на каждой траекторий, но для каждой траектории константа будет своя. Чтобы функция $S$ гладко зависела от своих аргументов, нужно потребовать, чтобы эта константа гладко зависела от траектории.

Пусть $\Gamma$ — некоторая гиперповерхность, трансверсальная полю $A$. Рассмотрим задачу Коши $AS = 0$, $S|_\Gamma = S_0$, где $S_0$ — это заданная функция на гиперповерхности $\Gamma$. Решение задачи Коши имеет следующий (неявный) вид: $S(q) = S(q_0)$, где $q_0$ — это точка пересечения интегральной кривой поля $A$, проходящей через точку $q$, с гиперповерхностью $\Gamma$.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$-y\frac{\partial S}{\partial x} + x\frac{\partial S}{\partial y} = 0.$$

Соответствующее векторное поле $A$ имеет вид $(y, -x)$. Его интегральные кривые находятся из системы обыкновенных уравнений $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t.$$

Таким образом, интегральные кривые являются окружностями с центром в начале координат. Наша искомая функция $S$ должна быть постоянна на каждой такой окружности. Это говорит от том, что функция $S$ на самом деле является функцией только от $x^2+y^2$:

$$S(x, y) = f(x^2 + y^2).$$

Отсюда, в частности, видно, что не любая задача Коши на прямой $y = 0$ имеет решение. Чтобы задача Коши $S(x, 0) = S_0(x)$ имела решение, необходимо, чтобы функция $S_0$ была четной: $S_0(-x) = S_0(x)$.

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение $AS = g$, где $g$ — даннная функция. Оно решается вполне аналогично. Попрежнему, первый шаг — нахождение интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{q} = A$. Решение находится из неявной формулы

$$S(q(t)) = S(q(0)) + \int_0^t g(q(\tau))d\tau.$$

Начало отсчета времени можно выбирать произвольно. Например, если мы решаем задачу Коши $S|_\Gamma = S_0$, где $\Gamma$ — это некоторая гладкая гиперповерхность, а $S_0$ — заданная функция на этой гиперповерхности, то можно выбирать начало отсчета времени всегда так, чтобы точка $q(0)$ лежала на гиперповерхности $\Gamma$.

Пример. Решим неоднородное линейное уравнение

$$-y\frac{\partial S}{\partial x} + x\frac{\partial S}{\partial y} = 1.$$

Векторное поле $A$ — то же самое, что и в предыдущем примере. Имеем по общей формуле:

$$S(x(t), y(t)) = S(R, 0) + t.$$

Отсюда следует, что начальное условие $S(x, 0) = S_0(x)$ должно удовлетворять уравнению $S_0(-x) = S_0(x) + \pi$ при $x > 0$, чтобы существовало хотя бы одно решение с данным начальным условием. Но гладких начальных условий, удовлетворяющих этому уравнению, не существует! Всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению, разрывна в нуле!