"Спецфункции". Тезисы 4-ей лекции.

1. Докажем формулу дополнения $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ непосредственным интегрированием. Поскольку

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \Gamma(1)\,\mathrm{B}(x, 1-x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^x dt, \qquad 0 < \operatorname{Re} x < 1,$$

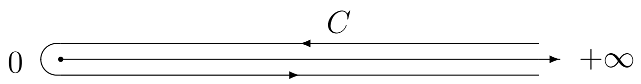
речь идет о вычислении интеграла

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^x dt.$$

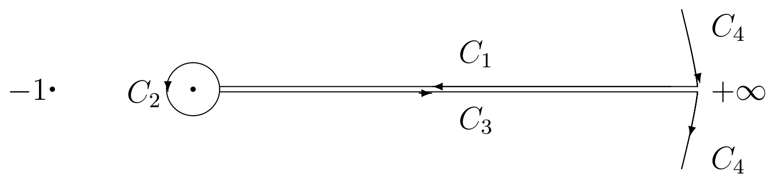
Естественна замена переменных $y = t/(1-t)$, $t = y/(y+1)$, $dt = dy/(y+1)^2$, так что

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^x dt = \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{y+1} dy.$$

Для вычисления этого интеграла методами ТФКП заменим луч $(0, +\infty)$ контуром C, обходящим этот луч по часовой стрелке:



Контур C можно разбить на три участка C_1, C_2 и C_3, первый из которых деформируется в часть действительной оси $(+\infty, r)$ с любым, сколь угодно малым r, проходимой в направлении от $+\infty$ к нулю, второй - в окружность $|y| = r$, проходимую против часовой стрелки, и третий - в луч $(r, +\infty)$, проходимый в направлении возрастания величины y.



Технически немного удобнее (будет далее видно, почему) рассмотреть вместо исходного интеграл

$$\oint_C \frac{(-y)^{x-1}}{y+1} dy = \oint_C \frac{e^{(x-1)(\log|y| + i(\arg y - \pi))}}{y+1} dy.$$

На контуре C_1 аргумент y равен 0, поэтому в пределе $r \to 0$

$$\oint_{C_1} \frac{e^{(x-1)(\log|y| + i(\arg y - \pi))}}{y+1} dy = e^{-\pi i(x-1)} \int_{+\infty}^0 \frac{y^{x-1}}{y+1} dy = e^{-\pi i x} \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{y+1} dy.$$

На контуре C_3 аргумент y увеличивается на 2π, поэтому в пределе $r \to 0$

$$\oint_{C_3} \frac{e^{(x-1)(\log|y| + i(\arg y - \pi))}}{y+1} dy = e^{+\pi i(x-1)} \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{y+1} dy = -e^{\pi i x} \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{y+1} dy.$$

В интеграле по контуру C_2 сделаем замену переменных $y = re^{i(\phi+\pi)}$:

$$\oint_{C_2} \frac{e^{(x-1)(\log|y|+i(\arg y-\pi))}}{y+1} dy = \int_{-\pi}^{\pi} r^{(x-1)} e^{i(x-1)\phi} ire^{i\phi} \frac{d\phi}{1-re^{i\phi}}.$$

При малых r вторым членом в знаменателе можно пренебречь, так что рассматриваемый интеграл стремится к

$$i \int_{-\pi}^{\pi} r^x e^{ix\phi} d\phi = r^x \frac{e^{\pi ix} - e^{-\pi ix}}{x},$$

что стремится к нулю при $r \to 0$, если только $\operatorname{Re} x > 0$. Таким образом, при $\operatorname{Re} x > 0$

$$\oint_C \frac{(-y)^{x-1}}{y+1} dy = (e^{-\pi ix} - e^{\pi ix}) \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{y+1} dy.$$

Достроим контур C до замкнутого, добавив к нему дугу большой окружности C_4: $|y| = R$, проходимую по часовой стрелке. Интеграл по этой дуге вычисляется так же, как и по малой, переходом к угловой координате $y = Re^{i(\phi+\pi)}$:

$$\oint_{C_4} \frac{(-y)^{x-1}}{y+1} dy = i \int_{\pi}^{-\pi} \frac{R^x}{1-Re^{i\phi}} e^{ix\phi} d\phi.$$

При больших R модуль дроби в подинтегральном выражение не превышает $R^{\operatorname{Re} x - 1}$, а оставшийся интеграл конечен,

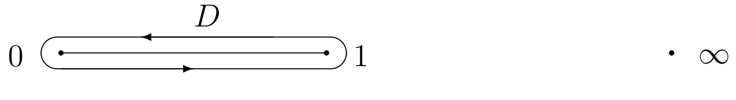
$$i \int_{\pi}^{-\pi} e^{ix\phi} d\phi = \frac{e^{-\pi ix} - e^{\pi ix}}{x},$$

так что интеграл по дуге C_4 стремится к нулю при $\operatorname{Re} x < 1$. Внутри замкнутого контура $C + C_4$ у подинтегральной функции имеется лишь один полюс в точке $y = -1$, так что интеграл по замкнутому контуру равен вычету подинтегральной функции в этой точке, умноженному на $-2\pi i$ (поскольку эта точка обходится контуром по часовой стрелке). Вычет равен $\lim_{y\to-1}(y+1)(-y)^{x-1}/(y+1) = 1$. Таким образом, при $0 < \operatorname{Re} x < 1$

$$(e^{-\pi ix} - e^{\pi ix}) \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{y+1} dy = -2\pi i, \qquad \text{так что} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{y+1} dy = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

что и доказывает формулу дополнения на всей комплексной плоскости в силу аналитичности обеих частей равенства.

2. Это же вычисление можно проделать и с эйлеровским интегралом $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^x dt$, не производя замены переменных. Для этого интеграл по отрезку надо заменить на интеграл по контуру D, окружающему отрезок $[0, 1]$:



Интеграл по большому кругу перейдет в интеграл по дуге вокруг точки 1, который будет мал при $\operatorname{Re} x < 1$, в то время как интеграл по дуге вокруг 0 устремится к нулю при

$\operatorname{Re} x > 0$, так что интеграл по контуру будет равен исходному, помноженному на разность мнимых экспонент. Вне контура подинтегральное выражение имеет полюс в бесконечности с вычетом, равным 1, если модифицировать интеграл на $\int_0^1 (-t)^{x-1}(1-t)^x dt$ и равным $e^{\pi i x}$, если этого не делать.

3. Таким же способом можно регуляризовать эйлеровский интеграл $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, перейдя к интегралу

$$\oint_C (-t)^{x-1}e^{-t}dt = \oint_C e^{(x-1)(\log|t|+i\arg t - i\pi)-t}dt$$

по рассмотренному уже контуру C, начинающемуся и заканчивающемуся в $+\infty$ и охватывающем начало координат против часовой стрелки. Как и выше, разобъем контур C на участки C_1, C_2 и C_3. На участке C_1 и C_3 имеем, как и раньше,

$$\oint_{C_1} (-t)^{x-1}e^{-t}dt = e^{-\pi i}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad \oint_{C_3} (-t)^{x-1}e^{-t}dt = -e^{\pi i}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Оценка интеграла по дуге C_2 немного отличается:

$$\oint_{C_2} e^{(x-1)(\log|t|+i\arg t - i\pi)-t}dt = ir^x\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\phi + r(\cos\phi + i\sin\phi)}d\phi.$$

При стремлении r к нулю подынтегральная функция в последнем интеграле стремится к $e^{ix\phi}$, а интеграл к конечному выражению $\frac{e^{\pi ix}-e^{-\pi ix}}{x}$, так что при $\operatorname{Re} x > 0$ все выражение стремится к нулю. Итак, при $\operatorname{Re} x > 0$ получаем $(e^{-\pi ix} - e^{\pi ix})\Gamma(x) = \oint_C (-t)^{x-1}e^{-t}dt$ и

$$\Gamma(x) = \frac{-1}{2i\sin\pi x}\oint_C (-t)^{x-1}e^{-t}dt.$$

Последняя формула носит имя интеграла Ханкеля. В силу аналитичности обеих частей равенства она верна для всех x, отличных от целого числа, и представляет тем самым еще один способ явного аналитического продолжения Γ - функции.