Семинар по спецфункциям. Листок 4

1. а) Покажите, что $\Gamma(z)$ - вещественная функция, т.е., $\bar{\Gamma}(z) = \Gamma(\bar{z})\ \forall z \in \mathbb{C}$;

   б) Покажите, что $\Gamma(z)$ быстро убывает на мнимой оси, а именно: для всякого чисто мнимого числа $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$,
$$|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{\pi}{y \operatorname{sh} \pi y}}$$

2. Пусть $f(x)$ -непрерывная функция вещественного аргумента $x \geq 0$, такая, что $\forall A > 0$ интеграл $\int_A^{+\infty} f(x)\frac{dx}{x}$ абсолютно сходится. Докажите, что для любых $a, b > 0$ интеграл Фруллани
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \qquad \text{абсолютно сходится и равен} \qquad f(0)\log\frac{b}{a}.$$

3.* Пользуясь интегралом Фруллани, покажите, что для всяких положительных $a_1, ... a_k$, $b_1, ..., b_k$ таких, что $a_1 + ... + a_k = b_1 + ... + b_k$,
$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1 + n)\cdots(a_k + n)}{(b_1 + n)\cdots(b_k + n)} = \exp \int_0^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^k \left(e^{-b_i t} - e^{-a_i t}\right)}{1 - e^{-t}} \frac{dt}{t}, \quad , a_i, b_j > 0,\ \sum a_i = \sum b_j.$$

4. а)** С помощью интеграл Фруллани можно получить интегральное представление для функции $\psi(x) = \frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$. Для этого в формуле $\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \log t \frac{dt}{t}$, полученной дифференциированием эйлерова интеграла, следует заменить логарифм на подходящий интеграл Фруллани. Выведите таким образом формулу Дирихле
$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right)\frac{dt}{t}, \qquad \operatorname{Re} x > 0$$

   б)* Доведите формулу Дирихле до интегрального представления $\log\Gamma(x)$:
$$\log\Gamma(x) = \int_0^\infty \left((x-1)e^{-t} - \frac{(1+t)^{-1} - (1+t)^{-x}}{\log(1+t)}\right), \qquad \operatorname{Re} x > 0$$

5. а) Пусть $f(x)$ - бесконечно дифференциируемая функция. Обозначим через $\mathrm{D}^{-1} f(x)$ неопределенный интеграл $\mathrm{D}^{-1} f(x) = \int_0^x f(t)dt$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{D} \cdot \mathrm{D}^{-1} f(x) = f(x)$ и $\mathrm{D}^{-1} \cdot \mathrm{D} f(x) = f(x)$, если $f(0) = 0$. Здесь D - операция взятия производной. Пусть $\mathrm{D}^{-n} f(x) = \left(\mathrm{D}^{-1}\right)^n f(x)$. Покажите, что
$$\mathrm{D}^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

   б)* Обобщите предыдущую формулу, заменив $-n$ на произвольное комплексное число с отрицательной действительной частью. Покажите, что так определенные дробные производные удовлетворяют тождеству $\mathrm{D}^\alpha D^\beta = \mathrm{D}^{\alpha+\beta}$

   с)** Предъявите аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость по параметру z построенного семества операторов D^z. Чему равно $\mathrm{D}^0 f(x)$?

6. а) Докажите, что ряд Эйзенштейна $\sum^e_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z+n}$ - нечетная антипериодическая функция с полупериодом 1

   б)* Выведите тождество
$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum^e_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z+n}.$$

7.* Выведите тождество
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

8.** Выведите формулу сложения котангенсов, пользуясь представлением котангенса рядом Эйзенштейна.