Дифференциальные уравнения. Листок 4.

Задача 1. а) Докажите, что если операторы A и B коммутируют, то $e^{A+B} = e^A e^B$;

б) Укажите ненулевой оператор A, такой что $e^A = E$ (E — тождественный оператор);

в) Выразите $e^{BAB^{-1}}$ через B и e^A;

г) Верно ли, что любой оператор B есть e^A для некоторого A?

Задача 2. Верно ли, что всякий достаточно близкий к тождественному оператор имеет вид e^A для некоторого A?

Задача 3. Вычислите e^{tA} для операторов со следующими матрицами:

а) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Для систем уравнений найдите фундаментальные системы решений и нарисуйте фазовые портреты.

а) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x \end{cases}$, б) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$, в) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, г) $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$.

Задача 5. Докажите, что экспонента кососимметрической матрицы есть ортогональная матрица.

Задача 6. Докажите, что функции $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, .., t^n e^{\lambda t}$ линейно независимы.