ЛИСТОК 4

1. Оператор (тензор кривизны) как явление линейной алгебры.

Назовем оператором кривизны любой линейный симметрический оператор $R : \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$ (в дифференциальной геометрии $V = T_x M$ – касательное пространство к многообразию M в точке x). Если в линейном пространстве V задано скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$, то в пространстве бивекторов $\Lambda^2 V$ определим скалярное произведение $(\ ,\ )$, положив его на паре разложимых бивекторов $(v \wedge w,\ x \wedge y)$ равным $\begin{vmatrix} \langle v, x\rangle & \langle v, y\rangle \\ \langle w, x\rangle & \langle w, y\rangle \end{vmatrix}$.

Задача 1. Доказать, что таким образом мы действительно задаем в пространстве $\Lambda^2 V$ скалярное произведение.

Задача 2. Пусть сигнатура квадратичной формы $\langle , \rangle$ на V равна (r, s). Вычислить сигнатуру формы $(,)$ на $\Lambda^2 V$.

Задача 3. Пусть R – симметрический оператор на пространстве $\Lambda^2 V$ относительно введенного скалярного произведения т. е. $(Rt, s) = (t, Rs)$ для любых $t, s \in \Lambda^2 V$. Доказать, что если $\{e_i\}$ – ортонормированный базис в V, то имеет место тождество Бианки

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$$

$$\text{где}\quad R_{ijkl} = (R(e_i \wedge e_j), (e_k \wedge e_l)).$$

Пусть $(u \wedge v, u \wedge v) = 1$. Число $(R(u \wedge v), (u \wedge v))$ называется гауссовой кривизной ориентированной 2-плоскости, заданной бивектором $u \wedge v$.

Задача 4. Доказать, что тензор кривизны является оператором кривизны на каждом пространстве $\Lambda^2 T_x M$.

2. Одно полезное свойство геодезических на поверхностях вращения.

Задача 5. Рассмотрим геодезическую линию l на поверхности вращения S. Пусть m – произвольная точка геодезической, r – расстояние от точки m до оси вращения, θ – угол между геодезической l и меридианом в точке m. Доказать, что $r \sin\theta = const$ во всех точках геодезической.

Замечание. Сформулированное утверждение помогает понять, как ведут себя геодезические на поверхности вращения.

3. Немного о матричных группах Ли.

Задача 6. Группа $SL(2,\mathbb{R})$ вкладывается в четырехмерное пространство вещественных 2×2 матриц M_2 в виде трехмерной гиперповерхности $det\ M = 1$ и наследует риманову метрику путем сужения евклидовой метрики в M_2 (напомним, что $(X, X) = tr(XX^t),\ X \in M$).

Вычислить гауссову кривизну группы $SL(2,\mathbb{R})$ в

а) точке E

б) точке $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

в) любой точке $g \in SL(2,\mathbb{R})$.

Задача 7. Найти все геодезические на группе $SO(3) \subset M_3$.

Задача 8. Пусть $X \in M_n(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Доказать, что

а) Решение $A(t)$ дифференциального уравнения $A'(t) = A(t)X$, при условии $A(0) = E$, является кривой, лежащей в $GL_n(\mathbb{R})$;

б) Положим $A(1) = \exp X$. Доказать, что $A(t) = \exp tX$;

в) $\exp(s+t)X = \exp sX \cdot \exp tX$

г) $\exp(X+Y) = \exp X \cdot \exp Y$, если $[X\ Y] = XY - YX = 0$.

д) $\exp X = E + X + o(X)$

Задача 9. Если $A \in SL_2(\mathbb{R})$ и $trA < -2$, то A нельзя представить в виде $\exp X$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, $trX = 0$.

Задача 10. Если $A,\ B \subset O(n)$ (группа ортогональных матриц), то линейный оператор $P_{A,B} : M \to AMB^{-1}$ на пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$ ортогонален (т. е. сохраняет скалярное произведение $(X, Y) = tr(XY^t)$). Доказать.

Задача 11. Касательная алгебра группы $O(n)$ состоит из кососимметрических матриц. Доказать.

Задача 12. Если K – кососимметрическая матрица, то

$$([K\ M_1], M_2) + (M_1, [K\ M_2]) = 0$$

для любых $M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{R})$. Доказать.