7.1. Исследуйте следующие функции на равномерную непрерывность: **1)** $f(x) = ax + b$ на $\mathbb{R}$; **2)** $f(x) = 1/x$ на $[1, +\infty)$; **3)** $f(x) = 1/x$ на $(0, 1)$; **4)** $f(x) = x^3$ на $\mathbb{R}$; **5)** $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0, +\infty)$; **6)** $f(x) = \sin x$ на $\mathbb{R}$; **7)** $f(x) = \sin(x^2)$ на $\mathbb{R}$.

7.2. Пусть f — дифференцируемая функция на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$.
1) Докажите, что если f' ограничена на I, то f равномерно непрерывна на I.
2) Верно ли обратное утверждение?

7.3. Пусть f — равномерно непрерывная функция на подмножестве $I \subseteq \mathbb{R}$.
1) Докажите, что если (x_n) — последовательность Коши в I, то $(f(x_n))$ — также последовательность Коши.
2) Верно ли предыдущее утверждение, если вместо равномерной непрерывности f потребовать лишь ее непрерывность?

7.4. Докажите, что функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда она продолжается до непрерывной функции на $[a, b]$.

7.5. Исследуйте следующие функциональные последовательности на равномерную сходимость: **1)** $f_n(x) = x^n$ на $[0, a]$, где $a < 1$; **2)** $f_n(x) = x^n$ на $[0, 1]$; **3)** $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ на $[0, 1]$; **4)** $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на $[0, 1]$; **5)** $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2}$ на $[0, 1]$; **6)** $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2}$ на $[a, +\infty)$, где $a > 0$; **7)** $f_n(x) = \sin(n^2e^{-nx})$ на $(0, +\infty)$; **8)** $f_n(x) = \sin(n^2e^{-nx})$ на $[a, +\infty)$ где $a > 0$.

7.6. Пусть (f_n) — последовательность непрерывных функций на на каком-либо множестве, равномерно сходящаяся к функции f. Докажите, что f ограничена тогда и только тогда, когда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что все f_n ограничены при $n > N$.

7.7. Пусть последовательности функций (f_n) и (g_n), определенных на каком-либо множестве, равномерно сходятся к функциям f и g соответственно. Докажите, что **1)** $\alpha f_n + \beta g_n$ равномерно сходится к $\alpha f + \beta g$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; **2)** если f и g ограничены, то $f_n g_n$ равномерно сходится к fg.

7.8. Пусть (f_n) — последовательность непрерывных функций на $[a, b]$, f — непрерывная функция на $[a, b]$, и (f_n) равномерно сходится к f на (a, b). Докажите, что (f_n) равномерно сходится к f на $[a, b]$.

7.9. Пусть (f_n) — последовательность непрерывных функций на каком-либо подмножестве в $\mathbb{R}$, равномерно сходящаяся к функции f. Докажите, что f непрерывна.

7.10. Приведите пример поточечно сходящейся последовательности непрерывных функций на отрезке, предел которой — разрывная функция.

7.11*. Постройте последовательность непрерывных функций, поточечно сходящуюся к функции Римана (см. задачу 3.14).