Листок 4. Гармонические осцилляторы

Все задачи в этом листке, кроме отмеченных звездочкой, являются обязательными.
Крайний срок сдачи письменных решений — **24 ноября**.

---

1. В модели одномерного гармонического квантового осциллятора, задаваемого гамильтонианом $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q^2}{2} = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$,

   (a) Определите, как эволюционируют в картине Гейзенберга операторы $a(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, полагая известными их начальные значения ($a(0) = a_0$ и т.п.). Сравните эволюцию средних значений наблюдаемых $Q(t)$, $P(t)$ (в произвольном состоянии квантовой системы) с эволюцией координаты и импульса классического гармонического осциллятора.

   (b) Вычислите дисперсию наблюдаемых Q и P в n-частичном состоянии. Сравните значение $\Delta Q \Delta P$ в n-частичном состоянии с ограничением, накладываемым соотношением неопределенности Гейзенберга.

2. **Осциллятор в голоморфном представлении.**
   На пространстве $\mathcal{D}$ функций вида

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} C_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \qquad \sum_{n\geq 0} |C_n|^2 < \infty, \qquad z \in \mathbb{C},$$

   эрмитово скалярное произведение задано формулой

$$(f, g) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f^*(z) g(z) e^{-|z|^2} d^2 z, \qquad \text{где } d^2 z = d\mathrm{Re}(z)\, d\mathrm{Im}(z) = |z|\, d|z|\, d\mathrm{Arg}(z).$$

   (a) Докажите, что функции $e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{D}$.

   (b) Сопоставив n-частичным состояниям квантового осциллятора базисные функции $e_n(z)$, постройте представление операторов рождения-уничтожения $a^\dagger$ и a в пространстве $\mathcal{D}$.

3. **Когерентные состояния.**
   Когерентными называются чистые состояния квантового осциллятора, являющиеся собственными векторами оператора уничтожения:

$$a\,\phi_z = z\,\phi_z, \qquad |\phi_z|^2 = 1.$$

   Они определены при всех $z \in \mathbb{C}$.

   (a) Получите выражение для когерентного состояния ϕ_z в виде разложения по n-частичным состояниям.

   (b) Определите, как эволюционирует когерентное состояние в картине Шредингера.

   (c) Вычислите среднее значение энергии квантового осциллятора в когерентном состоянии ϕ_z. Определите вероятность того, что энергия квантового осциллятора в состоянии ϕ_z принимает собственное значение $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

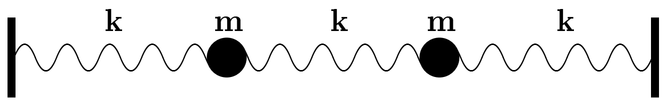
   (d) Найдите средние значения и дисперсии наблюдаемых Q и P в состоянии ϕ_z. Сравните значение $\Delta Q \Delta P$ в когерентном состоянии с ограничением, накладываемым соотношением неопределенности Гейзенберга.

(e)* Постройте волновую функцию $\Phi_z(x)$ когерентного состояния, т.е. вектор в координатном представлении, отвечающий состоянию ϕ_z. Определите плотность распределения вероятности того, что координата Q квантового осциллятора в состоянии ϕ_z принимает значение x. (*Указание.* Используйте координатное представления n-частичных состояний.)

(f)* Докажите замкнутость набора когерентных состояний:

$$\psi \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} (\phi_z, \psi)\, \phi_z \, d^2 z,$$

где ψ - произвольное чистое состояние квантового осциллятора. (*Указание.* Используйте разложение ψ и ϕ_z по n-частичным состояниям.)



4. На рисунке изображена система грузиков массы m на пружинках жесткости k. Грузики могут двигаться вдоль по горизонтали.

(a) Составьте гамильтониан системы, используя в качестве обобщенных координат отклонения $x_i, \; i = 1, 2$, грузиков от положения равновесия. Подберите ортогональное преобразование координат

$$x'_i \;=\; \sum_j O_{ij} x_j, \qquad ||O_{ij}|| \text{ — вещественная ортогональная матрица,}$$

такое, чтобы квадратичная форма потенциальной энергии системы в новых координатах x'_i была диагональной. Как при таком преобразовании изменяются обобщенные импульсы $\{p_i\} \mapsto \{p'_i\}$? Как преобразуется гамильтониан? Проверьте, что преобразование $\{x_i, p_i\} \mapsto \{x'_i, p'_i\}$ является каноническим, т.е. сохраняет неизменными скобки Пуассона. Определите собственные частоты колебаний системы грузиков и постройте общее решение классических уравнений движения.

(b) Проведите каноническое квантование системы в переменных $\{x'_i, p'_i\}$ (отличается ли оно от канонического квантования в переменных $\{x_i, p_i\}$?). Постройте две пары операторов рождения-уничтожения $a_i^\dagger$ и a_i:

$$[a_i, a_j^\dagger] \;=\; \delta_{ij}, \qquad [a_i, a_j] \;=\; [a_i^\dagger, a_j^\dagger] \;=\; 0,$$

и выразите через них гамильтониан. Постройте пространство Фока состояний квантовой системы, предполагая наличие в нем единственного вакуумного вектора ψ_0: $a_i\, \psi_0 \;=\; 0, \quad i = 1, 2$. Определите собственные значения гамильтониана (т.е. возможные значения энергии квантовой системы) и постройте ортонормированный базис его собственных векторов.

(c) Обозначим ψ_1 и ψ_2 — пару нормированных собственных векторов гамильтониана, наиболее близких по энергии к вакуумному состоянию ψ_0. Постройте чистое состояние ξ, соответствующее вектору $\psi_1 + \psi_2$, и смешанное состояние σ, в котором система с равной вероятностью находится в одном из состояний ψ_1 и ψ_2. Сравните средние значения и дисперсии энергии в состояниях ξ и σ.

(d)* Вычислите средние значения квантовых наблюдаемых X'_i, P'_i, X_i, P_i в состояниях ξ и σ. Сравните дисперсии каждой из этих наблюдаемых в состояниях ξ и σ.

5.** На фоковском пространстве состояний системы нескольких квантовых осцилляторов, задаваемой гамильтонианом

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{P_i^2}{2} + \frac{\nu_i^2 X_i^2}{2} \Big),$$

определен еще один осцилляторный гамильтониан

$$H_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^2}{2} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\Omega_{ij} X_i X_j}{2},$$

где Ω — вещественная положительно определенная симметрическая недиагональная матрица. (Такое может случиться, если в системе грузиков из предыдущей задачи внезапно оборвется одна из пружин.)

Постройте формальное выражение для вакуумного состояния гамильтониана H_2 в виде ряда по n-частичным состояниям гамильтониана H_1.

(*Подсказка.* Для вакуумного вектора гамильтониана H_2 можно использовать анзац

$$\exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_i^\dagger U_{ij} a_j^\dagger \Big) \psi_0,$$

где $a_i^\dagger$ и ψ_0 — операторы рождения и вакуумный вектор гамильтониана H_1, а U — симметрическая матрица, которую следует подобрать.)

При каких условиях формальное выражение для вакуумного вектора гамильтониана H_2 является хорошо определенным вектором фоковского пространства?