4. РАССЛОЕНИЯ.

Задачи с одной или двумя звездочками являются необязательными и на зачет не влияют. Задачи с двумя звездочками не связаны непосредственно с темой листка, но важны и интересны.

Напомним, что расслоением с тотальным пространством E, базой B и слоем F называется непрерывное отображение $p : E \to B$ такое, что для всякой точки $b \in B$ найдется окрестность U и непрерывное отображение $\lambda : p^{-1}(U) \to F$ (*тривиализация расслоения над* U), такое что отображение $\Lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$, заданное формулой $\Lambda(x) = (p(x), \lambda(x))$, является гомеоморфизмом.

Задача 1. Докажите, что приведенные ниже отображения являются расслоениями; укажите (где не указано в условии) базу, слой и тотальное пространство: а) тривиальное расслоение: $E = B \times F$, $p : E \to B$ — проекция прямого произведения на сомножитель; б) проекция ленты Мебиуса на ее среднюю линию; в) проекция бутылки Клейна на ее среднюю линию; г) E — множество пар (v_1, v_2) ортогональных друг другу векторов, v_1 — единичной длины, $B = S^2$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $p : E \to B$ действует по формуле $p(v_1, v_2) = v_1$; д*) То же самое, как в пункте 1г, но v_2 — также вектор едининчной длины. е*) (расслоение Хопфа) $E = S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^1$ (гомеоморфно двумерной сфере), $p : E \to B$ действует по формуле $p(z, w) = [z : w]$; ж*) E — множество пар, состоящих из k-мерного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ и вектора $v \in L$; $B = G(n, k)$ (грассманиан — множество k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$), $p(L, v) = L$; з*) E — множество пар, состоящих из k-мерного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ и линейного отображения $A : L \to L^\perp$; здесь $L^\perp$ — ортогональное дополнение к L, $B = G(n, k)$, а $p : E \to B$ — проекция $p(L, A) = L$. Опишите более подробно случай $k = 1$ (когда B — проективное пространство).

Задача 2*. а) Докажите, что расслоения задач 1г и 1з изоморфны касательным расслоениям к S^2 и $G(n, k)$ соответственно. б) Постройте конструкцию, аналогичную задаче 1з, для комплексного грассманиана. Во что переходит эта конструкция при $n = 2$, $k = 1$ (так что $G(2, 1) = \mathbb{C}P^1 = S^2$), и как она связана с конструкцией задачи 1г? в) Докажите, что тотальное пространство задачи 1д гомеоморфно группе $\mathrm{SO}(3)$ ортогональных матриц 3×3 с единичным определителем.

1. Бутылка Клейна

Задача 3. На координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ действует группа G, порожденная сдвигом $A(x, y) = (x + 1, y)$ и скользящей симметрией $B(x, y) = (-x, y + 1)$. а) Докажите, что пространство орбит K группы гомеоморфно бутылке Клейна. б) Докажите, что отображение $p : \mathbb{R}^2 \to K$, сопоставляющее каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ее орбиту, является универсальным накрытием над бутылкой Клейна. в) Докажите, что $\pi_1(K)$ изоморфна группе G. г*) Докажите, что $\pi_1(K)$ порождена двумя элементами a и b с единственным соотношением $abab^{-1} = 1$.

Указание. Докажите, что орбита произвольной точки под действием группы G дискретна (каждая ее точка изолирована).

Задача 4. Постройте точную гомотопическую последовательность расслоений из задач 1а–1г (т.е. вычислите все входящие в нее группы и гомоморфизмы).

Задача 5. Пусть $p : E \to B$ — накрытие, т.е. расслоение, слой F которого дискретен. Докажите, используя точную гомотопическую последовательность расслоения, что а) $p_* : \pi_1(E) \to \pi_1(B)$ — мономорфизм; б) $p_* : \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ — изоморфизм, если $n \geq 2$. в) Вычислите $\pi_n(S^1)$ при всех n.

2. Расслоение Хопфа

Задача 6*. а) Постройте точную гомотопическую последовательность расслоения Хопфа (задача 1е) вплоть до члена π_2. Выведите из нее, что $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. б) Какую информацию о гомотопических группах сфер можно получить из членов с π_n, $n \geq 3$, в точной последовательности расслоения Хопфа?

Задача 7*. Постройте точную гомотопическую последовательность расслоения задачи 1д вплоть до члена π_3.

В задачах ниже $p : S^3 \to \mathbb{C}P^1$ — расслоение Хопфа.

Задача 8.** Пусть $\alpha > 0$. а) Докажите, что множества $A_\alpha = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| \leq \alpha\}$ и $B_\alpha = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| \geq \alpha\}$ гомеоморфны кругам с общей границей $C_\alpha = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| = \alpha\}$. Выведите отсюда, что $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно двумерной сфере S^2. б) Докажите, что прообразы $p^{-1}(A_\alpha)$ и $p^{-1}(B_\alpha)$ гомеоморфны полноториям, а прообраз $p^{-1}(C_\alpha)$ — двумерному тору.

Задача 9.** а) Докажите, что множество $D = \{(z,w) \in S^3 \mid w \in [0,1]\}$ гомеоморфно кругу, причем границе круга при гомеоморфизме соответствует слой расслоения Хопфа $p^{-1}([1:0]) \subset S^3$. б) Докажите, что для всякого $a \neq [1:0]$ слой $p^{-1}(a)$ пересекает D ровно в одной точке.

Группа SU(2) состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{C}$ и $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Она действует на $\mathbb{C}^2$ линейными преобразованиями.

Задача 10.** а) Докажите, что SU(2) — группа, и что ее действие переводит множество $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ в себя; таким образом, SU(2) действует гомеоморфизмами на S^3. б) Докажите, что действие SU(2) на S^3 проецируется на базу расслоения Хопфа. Иными словами, для каждого $X \in \mathrm{SU}(2)$ существует гомеоморфизм $q(X) : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ такой, что $p \circ X = q(X) \circ p$. в) Докажите, что действие q транзитивно на точках: для любых $u, v \in \mathbb{C}P^1$ найдется $X \in \mathrm{SU}(2)$ такое, что $q(X)(u) = v$. г) Выведите из результатов задач 10**в и 9**б, что любые два различных слоя расслоения Хопфа зацеплены с коэффициентом зацепления 1: для любого $u \in \mathbb{C}P^1$ существует подмножество $D_u \subset S^3$, гомеоморфное кругу и такое, что $p^{-1}(u)$ переходит при гомеоморфизме в границу круга, а $p^{-1}(v)$ для любого $v \neq u$ пересекает D_u ровно в одной точке.