Логика и алгоритмы -2011. Задание 7

104. Общезначимы ли следующие формулы?

а) $\exists y \forall x P(x,y) \to \forall x \exists y P(x,y)$

б) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \to \forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$

в) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \to \forall x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$

г) $\exists x \forall y\ [(P(x,y) \wedge \neg P(y,x)) \to (P(x,x) \leftrightarrow P(y,y))]$

105. Среди следующих формул найдите все пары эквивалентных:

(1) $\forall x\, \exists y (P(x) \to Q(y))$;

(2) $\exists y\, \forall x (P(x) \to Q(y))$,

(3) $\forall y\, \exists x (P(x) \to Q(y))$;

(4) $\exists x\, \forall y (P(x) \to Q(y))$;

106. Докажите, что следующая формула ложна во всякой конечной модели, но выполнима в некоторой бесконечной:

$\forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z\ [\ (P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z))] \wedge \forall x \exists y P(x,y)$

107. Докажите, что следующие формулы истинны во всякой конечной модели, но не общезначимы:

а) $\forall x\, \forall y\, \forall z (R(x, x) \wedge (R(x, z) \to (R(x, y) \vee R(y, z)))) \to \exists x\, \forall y R(x, y)$,

б) $\exists x\, \forall y\, \exists z ((Q(y, z) \to Q(x, z)) \to (Q(x, x) \to Q(y, x)))$.

108. Докажите, что функция $f(x)=[x^{1/2}]$ (целая часть квадратного корня) - арифметическая.

109. Постройте формулу в данной сигнатуре Σ, имеющую единственную с точностью до изоморфизма модель, причем эта модель двухэлементна.

110. Постройте формулу в сигнатуре $\{=, <\}$, все модели которой - 2-элементные линейные порядки.

111. Рассмотрим модель $(\mathbf{R}^2, \cong)$, где $ab \cong cd$ означает равенство длин отрезков ab и cd. Длину отрезка ab обозначаем $|ab|$. Выразите в данной модели следующие предикаты:

а) предикат равенства;

б) $|xy| < |uv|$;

в) $B(x,y,z)$: точка y лежит между точками x и z.

112. (а) Определим ли предикат $\cong$ в модели $(\mathbf{R}^2, B)$?

(б) Определим ли предикат $|xy|=1$ в модели $(\mathbf{R}^2, \cong)$? (Вспомните лекцию.)

113. Пусть a, b – фиксированные точки плоскости на расстоянии 1. Отождествим прямую ab с множеством действительных чисел (где a =0 и b = 1). Определите сложение и умножение, рассматриваемые как функции на прямой ab, в модели $(\mathbf{R}^2, \cong, B, a, b)$.

(Указание: вспомните теорему Фалеса.)

114. а) Докажите, что существует биекция $f: \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$, определимая в $(\mathbf{N},+,\cdot)$;

б) Для каждого k>0 постройте определимую биекцию $f: \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$.