Вводная лекция

1 Релятивистская инвариантность

2 Электромагнитное поле

3 Скалярное поле, лагранжианы

4 Электромагнитное поле. Волны

5 Запаздывающие потенциалы

6 Энергия и импульс в теории поля

7 Взаимодействующие скалярные поля

7.1 Вещественное поле

Взаимодействующее вещественное скалярное поле (самодействие)

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \\ V(\phi) = \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 + \sum_{n=3,4}\frac{\lambda_n}{n}\phi^n\end{gathered} \tag{7.1}$$

Выбор степеней $n = 3, 4$ определяется *квантовыми* свойствами теории в 4-мерном пространстве-времени, а, скажем, в 1+1 измерениях возможны любые степени: теория синус-Гордона с $V(\phi) \sim -\cos(\phi)$.

Решения классических уравнений движения

$$\Box\phi(x) + V'(\phi) = 0, \qquad \Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu \tag{7.2}$$

- Вакуумы ϕ_0: $V'(\phi_0) = 0$, число определяется степенью для полиномиального потенциала. Вообще говоря - даже минимумы (не экстремумы) - квазивакуумы или локальные вакуумы. Настоящие вакуумы - решения с минимальной энергией, плотность которой (например, просто по аналогии с лагранжианом и гамильтонианом частиц)

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} + V(\phi) \geq V(\phi_0) \tag{7.3}$$

и, добавляя константу, всегда можно положить $\min V(\phi_0) = 0$. (Хотя все же неприятно, что эта константа дает *бесконечный* вклад в энергию, пропорциональный объему пространства - энергия в теории поля относительная величина, проблемы с гравитацией из-за принципа эквивалентности).

- Отсутствие линейного члена $V'(0) = 0$. Иначе можно (нужно) просто сделать сдвиг $\phi \to \phi + \phi_0$, так чтобы $V'(\phi_0) = 0$. Для свободной теории $\phi_0(J, m) \sim \frac{J}{m^2}$, где J - коэффициент при линейном члене (постоянный источник).

Пример скалярного потенциала

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - a^2)^2 = \frac{\lambda}{4}a^4 - \frac{\lambda a^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{7.4}$$

он отвечает возбуждениям с мнимой массой $m^2 = -\lambda a^2$, или волнам с законом дисперсии $\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 = \mathbf{p}^2 - \lambda a^2$. Поэтому вроде как

$$\begin{gathered} |\mathbf{p}| > \mathcal{E}/c, \quad \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} > \frac{mc}{\sqrt{1-v^2}} \\ v > c \end{gathered} \tag{7.5}$$

что называется тахионом?! А на самом деле?

Точка $\phi = 0$ *не есть* вакуум. Настояхих вакуума два $\phi_0 = \pm a$ (потенциал обладает $\mathbb{Z}_2$-симметрией $\phi \leftrightarrow -\phi$). Пусть $\phi = a + \varphi$, тогда

$$V(\phi) \to V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\varphi^2(2a + \varphi)^2 = \frac{\lambda}{4}(2a)^2\varphi^2 + \frac{\lambda a}{2}\varphi^3 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \tag{7.6}$$

т.е. отвечает вполне себе нормальному полю с массой $m^2 = 2\lambda a^2$.

7.2 Комплексное поле. Вырожденные вакуумы и ток

Пусть теперь скалярных поля будет два $\phi_{1,2}$ (поле со значениями в $\mathbb{R}^2$), и мы будем пользоваться их комплексными комбинациями

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \qquad \bar{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{7.7}$$

Напишем лагранжиан

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - V(\bar{\phi}, \phi) \tag{7.8}$$

и выберем потенциал Гинзбурга-Ландау

$$V(\bar{\phi}, \phi) = V(|\phi|) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2 \tag{7.9}$$

У такой теории скалярного поля есть два интересных свойства:

- Непрерывное семейство вакуумов $dV = 0$, $|\phi|^2 = a^2$, т.е. $\phi = ae^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$, или $\vartheta/2\pi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (бутылочное дно).

- В теории существует сохраняющийся ток

$$j_\mu = -i(\bar{\phi}\partial_\mu\phi - \partial_\mu\bar{\phi}\phi) \tag{7.10}$$

  на уравнениях движения, т.е.

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu = -i(\bar{\phi}\Box\phi - \Box\bar{\phi}\phi) = i\left(\bar{\phi}\frac{\partial V}{\partial\bar{\phi}} - \phi\frac{\partial V}{\partial\phi}\right) = \\ = -\frac{\partial}{\partial\varepsilon}V\left(e^{-i\varepsilon}\bar{\phi}, e^{i\varepsilon}\phi\right)\Big|_{\varepsilon=0}\end{aligned} \tag{7.11}$$

  что действительно равно нулю, скажем, для любого $V(\bar{\phi}, \phi) = V(|\phi|)$. Этот ток можно интерпретировать как электромагнитный ток. Почему - попробуем объяснить потом.

- Заметим, что в теории вещественного поля аналога тока (7.10) не существует, скажем 4-вектор $\phi\partial_\mu\phi$ не сохраняется, а сохраняющийся $\partial_\mu\phi$ - тривиален, так как линеен по полю.

Полярные координаты: пусть $\phi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$, $\bar{\phi}(x) = \rho(x)e^{-i\theta(x)}$, тогда

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - V(|\phi|) = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - V(\rho) \tag{7.12}$$

и в теории (при разложении около $\rho(x) \sim a$) всегда есть безмассовый голдстоуновский бозон $\theta(x)$ - свободное поле со значениями в компактном многообразии (окружности). При этом $j_\mu = 2\rho^2 \partial_\mu \theta$.