Задачи по классическим группам 3, 21.11.2011–05.12.2011

0. Квадратичную форму Q на V продолжим до формы ΛQ на $\Lambda^\bullet V$ формулой $\Lambda Q(v_1\wedge\ldots\wedge v_k, w_1\wedge\ldots\wedge w_k)=\det(Q(v_i,w_j))$. Оператор левого умножения на $u\in\Lambda^\bullet V$ будем обозначать $\ell(u)$, а сопряжённый ему (относительно ΛQ) оператор будем обозначать $\iota(u):\ \Lambda^\bullet V\to\Lambda^\bullet V$. a) Докажите, что для $v,w\in V\subset\Lambda^\bullet V$ имеем $\ell(v)\iota(w)+\iota(w)\ell(v)=Q(v,w)$. b) Положим $\gamma(v):=\ell(v)+\iota(v)$. Докажите, что $\gamma(v)^2=Q(v,v)$. Значит, отображение $v\mapsto\gamma(v)$, $V\to\operatorname{End}\Lambda^\bullet V$, продолжается до гоморфизма $\gamma:\ C(Q)\to\operatorname{End}\Lambda^\bullet V$, $v_1\cdots v_k\mapsto(\ell(v_1)+\iota(v_1))\circ\ldots\circ(\ell(v_k)+\iota(v_k))$. c) Докажите, что отображение $\psi:\ C(Q)\to\Lambda^\bullet$, $x\mapsto\gamma(x)(1)$, является изоморфизмом (векторных пространств, а не алгебр, разумеется).

1. Докажите, что a) пересечение центра алгебры Клиффорда $C(Q)$ с чётной подалгеброй C^+ состоит из скаляров $\mathbb{C}$; b) если $x\in C^-$ обладает свойством $x\cdot v=-v\cdot x$ для всех образующих $v\in V$, то $x=0$.

2. Пусть $C(p,q)$ — вещественная алгебра Клиффорда квадратичной формы с p плюсами и q минусами. Докажите, что a) $C(0,1)\simeq\mathbb{C}$; b) $C(0,2)\simeq\mathbb{H}$; c) $C(n,n)\simeq\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$; d) $C(n+1,n)\simeq\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})\oplus\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$; e) $C(p,q)$ изоморфна одному или двум экземплярам матричной алгебры над $\mathbb{R},\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$.

3. a) Пусть $v,w\in V$; $Q(v,v)=Q(w,w)\neq 0$. Докажите, что v можно перевести в w либо отражением, либо композицией двух отражений; b) Докажите, что произвольный элемент $O(V)$ является произведением не более $2\dim V$ отражений.

4. Докажите, что центр $\operatorname{Spin}_m(\mathbb{C})$ равен a) $\{\pm1\}$, если m нечётно; b) $\{\pm1,\pm\omega\}$, если $m=2n$ чётно, и $\omega=(-2i)^{-n}(v_1\cdot v_{n+1}-v_{n+1}\cdot v_1)\ldots(v_n\cdot v_{2n}-v_{2n}\cdot v_n)$.

5. Докажите, что a) образ спинорного представления $\operatorname{Spin}\to GL(S)$ лежит в $SL(S)$; b) если $m=4n$, то образы полуспинорных представлений $\operatorname{Spin}\to GL(S^\pm)$ лежат в $SL(S^\pm)$.

6. Построим невырожденную билинейную форму β на спинорном пространстве $S=\Lambda^\bullet L:\ \beta(s,t):=\operatorname{pr}(\tau(s)\wedge t)$. Здесь $\tau(v_1\wedge\ldots\wedge v_r):=v_r\wedge\ldots\wedge v_1$ — антиинволюция, а pr — проекция на старшую степень $\Lambda^{\mathrm{top}}L\simeq\mathbb{C}$. Пусть $m=2n$. a) Докажите, что $\beta(s,t)f=\tau(s\cdot f)\cdot t\cdot f$ для подходящей образующей $f\in\Lambda^nL'$, откуда следует, что действие $\operatorname{Spin}(Q)$ на S сохраняет β. b) Докажите, что β симметрична (кососимметрична), если $n\equiv 0,3 \pmod 4$ ($n\equiv 1,2 \pmod 4$). c) Если n нечётно, ограничения $\beta|_{S^\pm}\equiv 0$. d) Если n чётно, полуспинорные представления задают гомоморфизмы $\operatorname{Spin}_{2n}\to SO_{2^{n-1}}$ при $n\equiv 0 \pmod 4$ и $\operatorname{Spin}_{2n}\to Sp_{2^{n-1}}$ при $n\equiv 2 \pmod 4$. В частности, Spin_8 имеет ещё два гомоморфизма в SO_8, не считая тавтологического.

7. Докажите, что спинорные (полуспинорные) представления задают изоморфизмы a) $\operatorname{Spin}_2\cong GL(S^+)=GL_1=\mathbb{C}^*$; b) $\operatorname{Spin}_3\cong SL(S)=SL_2$; c) $\operatorname{Spin}_4\cong SL(S^+)\times SL(S^-)=SL_2\times SL_2$; d) $\operatorname{Spin}_5\cong Sp(S)=Sp_4$; e) $\operatorname{Spin}_6\cong SL(S^+)=SL_4$.

8. Докажите, что если $Q(v,v)=Q(w,w)=-1$, $Q(v,w)=0$, то путь $t\mapsto(\cos(t)v+\sin(t)w)\cdot(\cos(t)v-\sin(t)w)$, $0\le t\le\pi/2$, соединяет -1 и $1\in\operatorname{Spin}(Q)$.

9. Обозначим C_m алгебру Клиффорда стандартной квадратичной формы Q_m на $\mathbb{C}^m$. Вложение $\mathbb{C}^{2n}=L\oplus L'$ в $\mathbb{C}^{2n+1}=L\oplus L'\oplus U$ задаёт вложение C_{2n} в C_{2n+1} и Spin_{2n} в $\operatorname{Spin}_{2n+1}$. Кроме того, $\mathbb{C}^{2n+1}=L\oplus L'\oplus U$ вложено в $\mathbb{C}^{2n+2}=L\oplus L'\oplus U_1\oplus U_2$, где $U_1\oplus U_2=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ снабжено квадратичной формой $h(1_1,1_1)=h(1_2,1_2)=0$, $h(1_1,1_2)=1$, а $U=\mathbb{C}$ вложено в $U_1\oplus U_2$ так, что 1 переходит в $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. Таким образом, C_{2n+1} вкладывается в C_{2n+2}, а $\operatorname{Spin}_{2n+1}$ — в $\operatorname{Spin}_{2n+2}$. Докажите, что a) ограничение спинорного представления S группы $\operatorname{Spin}_{2n+1}$ на Spin_{2n} изоморфно сумме полуспинорных представлений $S^+\oplus S^-$ группы Spin_{2n}. b) Ограничение обоих полуспинорных представлений $\operatorname{Spin}_{2n+2}$ на $\operatorname{Spin}_{2n+1}$ изоморфно спинорному представлению $\operatorname{Spin}_{2n+1}$.

10. Пусть $V=L\oplus L'$ — 8-мерное векторное пространство с квадратичной формой Q. Как утверждается в Упражнении 6d), полуспинорные представления $S^\pm$ снабжены каноническими квадратичными формами $Q^\pm$. Обозначим соответствующие квадрики в проективных пространствах $\mathbb{P}(V),\mathbb{P}(S^\pm)$ через $\mathcal{Q},\mathcal{Q}^\pm$. Действие $V\subset C(Q)$ на $\Lambda^\bullet L=S^+\oplus S^-$ переводит S^+ в S^- и наоборот: $V\times S^+\to S^-$, $V\times S^-\to S^+$. a) Пусть $s^+\in S^+$; докажите, что $\{v\in V:\ v\cdot s^+=0\}$ — это изотропная 4-плоскость в V, т.е. 3-плоскость $\mathbb{P}^3_{s^+}\subset\mathcal{Q}$. Аналогично, каждая точка $s^-\in\mathcal{Q}^-$ задаёт 3-плоскость $\mathbb{P}^3_{s^-}\subset\mathcal{Q}$. b) Докажите, что каждая изотропная 3-плоскость $\mathbb{P}^3\subset\mathcal{Q}$ получается однозначно одной из двух вышеописанных конструкций.

11. Определим произведение $S^+ \times S^- \to V,\ s^+ \times s^- \mapsto s^+ \cdot s^-$, условием $Q(v, s^+ \cdot s^-) = Q^-(v \cdot s^+, s^-)$. Теперь можно повторить конструкцию Упражнения 10 и по точке $s^- \in Q^-$ построить 3-плоскость $\mathbb{P}^3_{s^-} \subset \mathcal{Q}^+$, и вообще, по точке любой из трёх квадрик построить 3-плоскость в любой другой. Докажите, что эта конструкция допускает следующее эквивалентное описание: a) точке $v \in Q$ сопоставляются 3-плоскости $\{\mathsf{L}^\pm \in \mathcal{Q}^\pm :\ \mathsf{L}^\pm \ni v\}$; b) точка $\mathsf{L}^\pm \in \mathcal{Q}^\pm$ уже является 3-плоскостью в $\mathcal{Q}$, и ей дополнительно сопоставляется 3-плоскость $\{\mathsf{L}^\mp \in \mathcal{Q}^\mp :\ \mathsf{L}^\pm \cap \mathsf{L}^\mp = \mathbb{P}^2\}$. Так проявляется триальность: $\mathrm{Out}(\mathrm{Spin}_8) = \mathfrak{S}_3$.

12. Умножения из Упражнений 10, 11 задают структуру алгебры Жордана (коммутативной неассоациативной) на $A = V \oplus S^+ \oplus S^-$. Операция $(v, s^+, s^-) \mapsto Q^-(v \cdot s^+, s^-)$ задаёт симметричную кубическую (трилинейную) форму Φ на A. Определим автоморфизм третьего порядка $J :\ V \to S^+ \to S^- \to V$ следующим образом: выберем $v_0 \in V,\ s_0^+ \in S^+ :\ Q(v_0, v_0) = 1 = Q^+(s_0^+, s_0^+)$ и положим $s_0^- := v_0 \cdot s_0^+$, так что $Q^-(s_0^-, s_0^-) = 1$. Определим инволюции $\varphi :\ S^+ \leftrightarrow S^-, V \leftrightarrow V,\ \varphi(s^+) = v_0 \cdot s^+,\ \varphi(v) = 2Q(v, v_0)v_0 - v$, и $\psi :\ V \leftrightarrow S^-,\ S^+ \leftrightarrow S^+,\ \psi(v) = v \cdot s_0^+,\ \psi(s^+) = 2Q^+(s^+, s_0^+)s_0^+ - s^+$. Наконец, $J := \varphi \circ \psi$. Докажите, что J сохраняет структуру алгебры на A, кубическую форму Φ и скалярное произведение $Q \oplus Q^+ \oplus Q^-$.

13. a) Докажите, что у группы Spin_8 есть автоморфизм третьего порядка j такой, что следующая диаграмма коммутирует для любого $g \in \mathrm{Spin}_8$:

$$\begin{array}{ccccccc}
V & \xrightarrow{J} & S^+ & \xrightarrow{J} & S^- & \xrightarrow{J} & V \\
\rho(g)\big\downarrow & & \rho^+(j(g))\big\downarrow & & \rho^-(j^2(g))\big\downarrow & & \rho(g)\big\downarrow \\
V & \xrightarrow[J]{} & S^+ & \xrightarrow[J]{} & S^- & \xrightarrow[J]{} & V
\end{array}$$

b) Обозначим $\mathsf{j} :\ \mathfrak{so}_8 \to \mathfrak{so}_8$ соответствующий автоморфизм порядка 3. Докажите, что $\forall\ x \in \mathfrak{so}_8,\ v \in V,\ s^+ \in S^+,\ s^- \in S^-$, имеем $\Phi(x(v), s^+, s^-) + \Phi(v, \mathsf{j}x(s^+), s^-) + \Phi(v, s^+, \mathsf{j}^2 x(s^-)) = 0$.