Алгебра. 1 курс. Листок 5.

◇ **5.1.** *Докажите, что вырожденная 2×2 матрица либо нильпотентна, либо пропорциональна идемпотентной матрице.*

◇ **5.2.** *Докажите, что если 2×2 матрица A нильпотентна, то $A^2=0$.*

◇ **5.3.** *Найдите все вещественные 2×2 матрицы A, удовлетворяющие каждому из следующих условий: а) нильпотентные; б) идемпотентные; в) $A^2=E$; г) $A^2=-E$.*

◇ **5.4.** *Докажите, что квадрат матрицы ранга 1 пропорционален ей самой.*

◇ **5.5.** *Вычислите A^m ($m\in\mathbb{N}$) и A^{-1} (если только обратная существует) для следующих матриц (если размер не указан, считать, что $n\times n$):*

а) $a_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{если}\quad j=i+1\\ 0 & \text{если}\quad j\neq i+1\end{cases}$ *б)* $a_{i,j}=\begin{cases}x & \text{если } j=i\\ 1 & \text{если } j=i+1\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$ *в)* $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

г) $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$ *д)* $a_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{если } j\geq i\\ 0 & \text{если } j<i\end{cases}$ *е)* $a_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{если } j-i\equiv 1 \pmod n\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$

ж) $\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; *з)* $a_{i,j}=\begin{cases}\frac{x^{j-i}}{(j-i)!} & \text{если } j\geq i\\ 0 & \text{если } j<i\end{cases}$.

◇ **5.6.** *Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB=BA$. Перечислите все матрицы, перестановочные с матрицей A в следующих случаях:*
а) A — диагональная матрица, причем все $a_{i,i}$ различны. б) A — из 5.5а; в) A — из 5.5в;
г) A — из 5.5е; д) A — из 5.5ж, причем x,y,z все различные и ненулевые. е) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

◇ **5.7.** *Докажите, что следующие множества матриц являются кольцами. Про каждое из них выясните, коммутативно ли оно, является ли оно полем, можно ли его представить в виде прямого произведения колец, содержит ли оно нильпотентные элементы (перечислите!).*
1) Все верхнетреугольные $n\times n$ матрицы; 2) Все диагональные $n\times n$ матрицы;
3)-8) Каждое из множеств а)-е) из предыдущей задачи.

◇ **5.8.** *Докажите, что любая 2×2 матрица A удовлетворяет соотношению вида $A^2+\lambda A+\mu E=0$. (E — единичная матрица, а 0 — нулевая.) Выразите λ и μ через коэффициенты матрицы A.*

◇ **5.9.** *Пусть N — нильпотентная матрица. Докажите, что матрица $E+N$ обратима.*

◇ **5.10.** *Докажите, что а)$\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}BA$; б) если C обратима, то $\operatorname{tr}CAC^{-1}=\operatorname{tr}A$.*

◇ **5.11.** *Пусть A — 2×2 матрица. Докажите формулу для вычисления обратной матрицы:* $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left[(\operatorname{tr}A)E-A\right]$.

◇ **5.12.** *Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое поле. Докажите, что множество матриц вида* $\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$, *$x,y\in\mathbb{K}$ является коммутативным кольцом с единицей. Докажите, что это кольцо нельзя представить в виде прямого произведения колец. Перечислите все его делители нуля и нильпотентные элементы. Докажите, что в случае $\mathbb{K}=\mathbb{F}_p$ это кольцо не изоморфно никакому кольцу $\mathbb{Z}_n$.*

◇ **5.13.** *а) Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое поле, A — 2×2 матрица над $\mathbb{K}$. Докажите, что множество матриц вида $xE+yA$, $x,y\in\mathbb{K}$ является коммутативным кольцом с единицей. Докажите, что это кольцо изоморфно либо прямому произведению $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$, либо кольцу из предыдущей задачи, либо является полем.*
б) Покажите, что все три указанных в пункте "а" варианта реализуются в случае $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.
в) Покажите, что все три указанных в пункте "а" варианта реализуются в случае $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$.
г) Покажите, что все три указанных в пункте "а" варианта реализуются в случае $\mathbb{K}=\mathbb{F}_2$.
д) Покажите, что если в случае $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ получилось поле, то оно изоморфно полю $\mathbb{C}$.