Семинар по спецфункциям. Листок 5

1. а) Пусть $\varphi(t)$, $t \in (0,\infty)$ - непрерывная функция, убывающая при $t \to +\infty$ быстрее некоторой экспоненты, $|\varphi(t)| < e^{-ct}$ для некоторого $c > 0$ при всех $t > T$. Пусть числа a_i, $i = m, m+1, ...$ таковы, что для любого $n \geq m$ величина $\varphi(t) - \sum_{i=m}^n a_i t^i$ есть $O(t^{n+1})$, т.е., отношение $(\varphi(t) - \sum_{i=m}^n a_i t^i)/t^{n+1}$ ограничено в некоторой окрестности $(0,\varepsilon)$ точки $t = 0$ (иными словами, ряд $\sum_{i=m}^{+\infty} a_i t^i$ является асимптотическим разложением функции $\varphi(t)$ в нуле). Тогда преобразование Меллина, определяемое как аналитическое продолжение интеграла

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt$$

есть мероморфная функция с простыми полюсами в точках $s = -n$, где $n \geq m$; вычет $\tilde{\varphi}(s)$ в полюсе $s = -n$ равен a_n.

б)* Пусть теперь $\varphi(t)$, $t \in (0,\infty)$, также убывающая при $t \to +\infty$ быстрее некоторой экспоненты, имеет в нуле асимптотическое разложение $\varphi(t) \sim \sum_{i=m}^{+\infty}(a_i t^i + b_i t^i \log t)$. Тогда преобразование Меллина $\tilde{\varphi}(s)$ есть мероморфная функция с полюсами второго порядка в точках $s = -n$, где $n \geq m$; вычет $\tilde{\varphi}(s)$ в полюсе $s = -n$ равен a_n, а коэффициент при главной части равен $-b_n$.

2. а) Выразите через значения Γ-функции интеграл $\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx$, иными словами, найдите преобразование Меллина $\tilde{\varphi}(\frac{s}{2})$ функции $\varphi(t) = e^{-\pi n^2 t}$.

б)* Докажите, что при $\mathrm{Re}\, s > 2$ функция $\zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}$, где $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$, допускает следующее интегральное представление:

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx, \qquad \text{где} \qquad \omega(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 x}.$$

в)* Докажите, что интеграл в предыдущей формуле сходится и при $\mathrm{Re}\, s > 1$.

3. а) Разложите в ряд Фурье функцию с периодом 1, равную $e^{2\pi i x y}$ для всякого y, $0 < y < 1$. Здесь x - произвольное комплексное число, отличное от целого.

б)* Получите таким способом разложение в ряд Эйзенштейна функций $\pi \,\mathrm{ctg}\, \pi x$ и $\pi / \sin \pi x$.

4.* Покажите, что $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1)$. Здесь γ -постоянная Эйлера.

5. Пользуясь соотношением Римана $2^{1-s}\Gamma(s)\zeta(s)\cos(\frac{1}{2}\pi s) = \pi^s \zeta(1-s)$, покажите, что нули $s = -2n$, $n \geq 1$ функции Римана - простые.

6. а) Покажите, что соотношение Римана можно переформулировать как инвариантность относительно замены $s \leftrightarrow 1-s$ функции $\bar{\zeta}(s) = \zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$.

б)** Риман предъявил два доказательства функционального уравнения на $\zeta(s)$: в первом интеграл Ханкеля суммируется по вычетам; во втором утверждение задачи 6а доказывается непосредственно с использованием задачи 2б и следует из функционального соотношения $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t})$, где $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$. Последнее же есть результат применения формулы суммирования Пуассона ($\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$, где $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{2\pi i \lambda x} dx$) к быстроубывающей функции $f(y) = e^{-\pi t y^2}$. Восстановите это доказательство.

7.** Докажите, что $\zeta'(0)/\zeta(0) = \log 2\pi$.

8. Пользуясь формулой Эйлера $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$, где p пробегает все простые числа, $\mathrm{Re}\, s > 1$, и аналитическими свойствами $\zeta(s)$, покажите, что

а) простых чисел бесконечно много

б)* ряд $\sum_p p^{-1}$, где p - простые числа, расходится.

9. Покажите, что $\zeta(s)$ не обращается в ноль в областях $\mathrm{Re}\, s > 1$ и $\mathrm{Re}\, s < 0, s \neq -2, -4, ...$