Мера и интеграл

Задача 1. a) Докажите, что канторово множество (состоящее из чисел на $[0,1]$, в троичной записи которых отсутствуют единицы, но допускается хвост из двоек) имеет мощность континуум, но меру Лебега ноль.

b) Постройте подмножество $[0,1]$ заданной меры $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, замыкание которого совпадает со всем отрезком.

c^*) Постройте открытое подмножество $[0,1]$ заданной меры $0 < \mu \leqslant 1$, замыкание которого совпадает со всем отрезком.

Задача 2. Найдите мощность множества подмножеств $[0,1]$

a) мера Лебега которых равна нулю;

b) мера Лебега которых равна $\mu > 0$;

c^*) не измеримых по Лебегу.

Задача 3. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Докажите, что функция f' измерима.

Задача 4. Пусть f_n — последовательность измеримых функций. Докажите, что

a) функции $\sup_n f_n$ и $\inf_n f_n$ измеримы на своей области определения;

b) множество точек, в которых эта последовательность сходится, измеримо.

Задача 5*. Определим *канторову лестницу* $F : [0,1] \to [0,1]$, переводящую точку канторова множества с троичной записью $0.a_1a_2\ldots$ в число с двоичной записью $0.b_1b_2\ldots$, где $b_i = a_i/2$, а точку вне него — в образ ближайшей точки канторова множества.

a^*) Докажите, что F непрерывна.

b^*) В каких точках F дифференцируема?

c^*) Докажите, что функция $F + x$ непрерывна и обратима. Чему равна мера образа канторова множества при таком отображении.

d^*) Пусть G — обратная функция к $F + x$. Постройте измеримое подмножество $X \subset [0,1]$, для которого $G^{-1}(X)$ неизмеримо.

Подсказка: постройте неизмеримое подмножество в прообразе канторова множества.

e^*) Постройте измеримые функции $[0,1] \to [0,1]$, композиция которых не является измеримой.

Задача 6. Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — измеримые по Лебегу подмножества отрезка $[0,1]$. Предположим, что каждая точка отрезка $[0,1]$ содержится не менее, чем в k из этих подмножеств. Докажите, что по крайней мере одно из E_i имеем меру, не меньшую k/n.

Подсказка: интеграл здесь поможет.

Задача 7. При каких α и β функция $x^\alpha \sin\left(x^\beta\right)$, доопределённая нулём в нуле на $[0,1]$,

a) интегрируема по Лебегу;

b) интегрируема в несобственном смысле по Риману?

Задача 8. Пусть $p \geqslant 1$ — вещественное число. Определим множество $L^p([a,b])$, состоящее из классов совпадающих почти всюду функций f, для которых $|f|^p$ интегрируема по Лебегу.

a) Докажите, что $L^p([a,b])$ — векторное пространство, и выражение $|f| = \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p d\mu}$ определяет норму на нём.

b) Докажите полноту $L^p([a,b])$.

Задача 9. Определим на множестве измеримых функций $[a,b] \to \mathbb{R}$ расстояние

$$\rho(f,g) = \int_a^b \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} d\mu.$$

a) Докажите, что $\rho(f,g)$ определено для всех измеримых f, g и определяет метрику на классах совпадающих почти всюду функций.

b^*) Докажите, что последовательность f_n сходится по этой метрике к f тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ меры множеств $\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.

c^*) Докажите, что полученное метрическое пространство полно.