4 Отображение exp и геодезические.

Из формулы для первой вариации длины кривой следует, что кратчайшая кривая с единичной скоростью между двумя точками p и q на поверхеости S должна быть геодезической. Но вопрос о существовании кратчайшей остается открытым. Мы покажем, что если точки p и q достаточно близки друг к другу, то существует геодезическая между ними, которая будет кратчайшей среди всех кривых на поверхности, соединяющих p и q. Это будет сделано с помощью экспоненциального отображения exp, конструкция которого представляется одной из важнейших в дифференциальной геометрии.

Определение и простые свойства exp.

Пусть $m \in S$ – точка на S, T_m – касательное пространство, $v \in T_m$. Обозначим через $a(v;t)$ единственную геодезическую на S, выходящую из точки m со скоростью v:

$$a(v,0) = m, \quad \dot{a}(v,0) = v$$

Через I_v обозначим максимальный интервал тех значений t, для которых геодезическая существует. Положим

$$U = \{v \in T_m \,|1 \in I_v\}.$$

Определим отображение $\exp : U \to S$, полагая

$$\exp(v) = a(v;1). \qquad (*)$$

Замечание. Нулевой вектор всегда лежит в U и его образ $\exp(0) = m$.

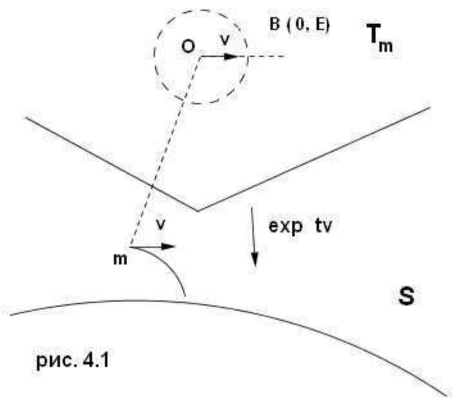

рис. 4.1

Пример 5 *Окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. В этом случае $a(v;t) = (\cos vt, \sin vt)$ и $\exp v = (\cos v, \sin v)$, или, в комплексном виде, $\exp v = e^{iv}$.*

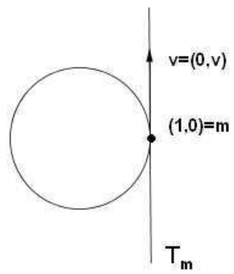

рис. 4.2

Перечислим те свойства exp, которые либо прямо следуют из определения, либо просто из него выводятся:

1. Отображение exp определено в некотором открытом шаре $U = B^0(0;\epsilon)$ касательного пространства T_m.

2. Если $v \in U$, то $tv \in U$, где $0 \leq t \leq 1$.

3. $(d\exp)_m = id$, а потому можно считать (сославшись на теорему о неявной функции), что $\exp : B^0(0;\epsilon) \to S$ диффеоморфно отображает некоторый открытый шар с центром в нуле в касательном пространстве T_m на открытое подмножество в S, содержащее точку m.

4. Для каждой точки $v \in B^0(0;\epsilon) \subset T_mS$ геодезическая $a(t;v) = \exp(tv)$ для всех t, $0 \leq t \leq 1$.

5. Длина $l(v)$ геодезической $\exp(tv)$ $(0 \leq t \leq 1)$ равна $|v|$.

Комментарии.

• Если просто и честно (по-гайдаровски), то exp преобразует движение точки по лучу vt в евклидовом пространстве T_m с постоянной скоростью v в движение на поверхности S по геодезической $\exp(tv)$ с той же начальной скоростью v. Поскольку во все время движения $|\dot{\exp}(tv)| = |v|$, то утверждение 5 кажется понятным (смотри рисунок 4.1).

• • Утверждение 4 следует из единственности геодезических: кривая $a(v,ts)$, определенная на интервале I_v/t, является геодезической со скоростью $\dot{a}(v,ts)_{s=0} = \; t\dot{a}(v,0) = tv$. В силу единственности $a(tv,s) = a(v,ts)$, т. е. $a(tv,1) = \exp(tv) = a(v,t)$.

Задача 1. Убедить себя в том, что Вы понимаете Утверждения 2 и 3.

• • • Утверждение 1 есть следствие компактности сферы и теоремы о гладкой зависисмости решений от начальных условий. (Указание: рассмотрите отображение: $\frac{v}{\|v\|} \to |I_v| \neq 0$).

Для тех, кому это хорошо знакомо, предлагаю развлечение в виде задачи 2.

Задача 2* Пусть $X = E^2$ – евклидова плоскость или $X = \Lambda^2$ – плоскость Лобачевского. Если $m \in X$, то отображение $\exp : T_m \to X$ является диффеоморфизмом.

Лемма 1

$$\|(d\exp)_v(w)\| = \|w\|\,, \textit{если} \;\; w = tv.$$

Это же можно сказать и так: отображение exp *сохраняет длины касательных векторов в радиальном направлении.*

□ Достаточно доказать, что $\|(d\exp)_v(v)\| = \|v\|$ (почему?).
Но $\left(\dot{\exp}\, tv\right)_{t=1} = (d\exp)_v(v)$. Как уже было отмечено в комментарии к пункту 5, $\left\|\dot{\exp}\, tv\right\| = \|v\|$. ■

Пример 6 *Геодезические на сфере S^2 (радиуса 1), стартующие в южном полюсе m, суть образы при отображении* exp *лучей из O. На рисунке 4.3 хорошо видно, что лишь при достаточно малом ϵ $(0 \le \epsilon \le 1)$* exp *отображает шар $B^0(0;\epsilon)$ диффеоморфно на зону U_ϵ на сфере.*

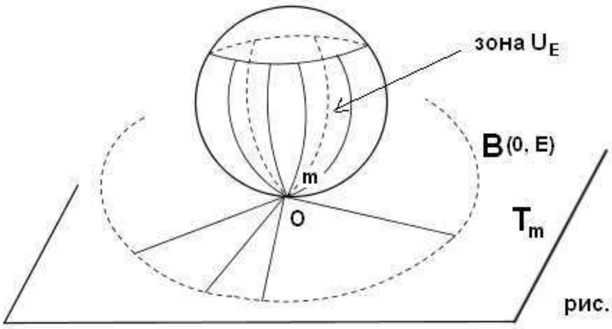

рис. 4.3

Следующая техническая лемма поможет нам окончательно решить вопрос о кратчайшей. Действие происходит в шаре $B^0(0;\epsilon)$ определения отображения exp в точке m.

Лемма Гаусса *Если вектор $w \in T_m$ ортогонален лучу tv, то $(d\exp)_v(w)$ ортогонален к геодезической $exp(tv)$. (см. рис. 4.4)*

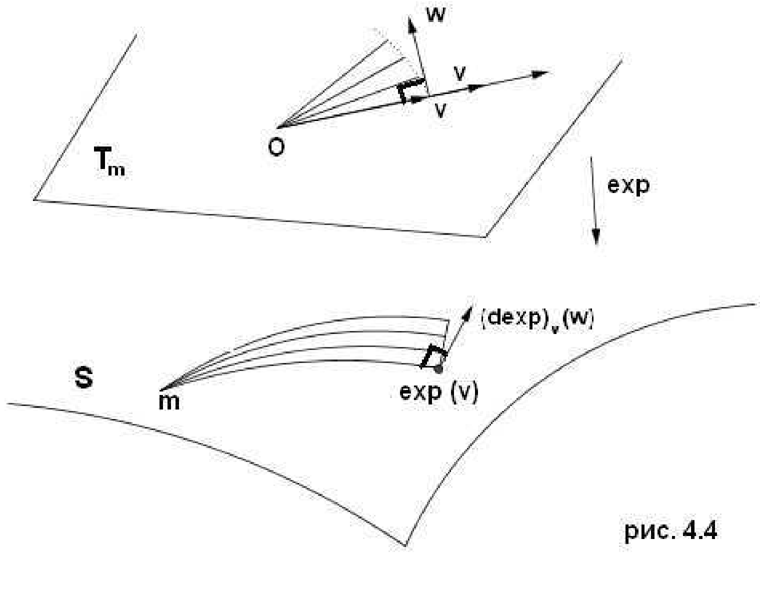

рис. 4.4

□ В касательном пространстве T_m в плоскости, натянутой на векторы v и w, рассмотрим семейство (веер) векторов $v(\theta)$, концы которых лежат на окружности радиуса $|v|$, $v(0) = v$. Тогда на S возникает семейство геодезических $\gamma(\theta,t) = \exp(tv(\theta))$, $0 \le t \le 1$, равной длины $\|v(\theta)\| = \|v\|$, в котором варьируется геодезическая $\gamma(0,t) =$

$\exp(tv)$. Ясно, что $(d\exp)_v v$ – это значение поля скоростей вдоль $\gamma(0,t)$ в точке $t=1$, а $(d\exp)_v w$ – это значение поля вариации (поля поперечных скоростей) в той же точке (почему?).

Применяя формулу для первой вариации и учитывая, что длина кривой $\gamma(\theta,t)$ не меняется, легко получаем, что

$$0 = \langle (d\exp)(w), (d\exp)(v)\rangle \qquad \blacksquare$$

Задача 2 *Восстановить все пропущенные детали в доказательстве леммы Гаусса.*

Действие следующей леммы происходит в шаре $B^0(0;\epsilon)$, где exp – диффеомеорфизм.

Лемма 2 *Пусть $\tilde{\gamma}(t)$ – любая гладкая кривая, соединяющая m и $\exp v$ на S (см. рис. 4.5). Тогда*

$$l(\tilde{\gamma}(t)) \geq \|v\| = l(\exp(tv)).$$

$$(\gamma(t) = \log\tilde{\gamma}(t))$$

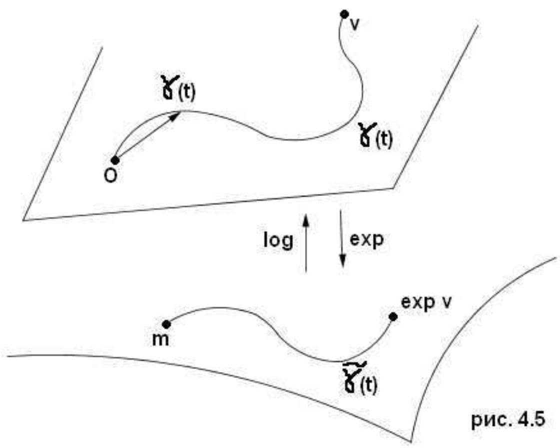

рис. 4.5

□ Пусть $\gamma(t) = \varphi(t)u(t)$, где $\|u(t)\| = 1$. Тогда $\dot{\gamma}(t) = \dot{\varphi}u + \varphi\dot{u}$, и $\dot{u}\perp u$. Далее,

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \|\dot{\tilde{\gamma}}\|\,dt = \left|\begin{array}{c}\text{так как а) в радиальном направлении и расстояния сохраняются}\\ \text{б)}\ \ (d\exp)(u)\perp(d\exp)(\dot{u})\end{array}\right| \geq$$

$$\geq \int_0^1 |\dot{\varphi}(t)|\,dt \geq \left|\int_0^1 \dot{\varphi}(t)dt\right| \geq |\varphi(1)| = |v| \qquad \blacksquare$$

Выводы: геодезические $\exp(tv)$ являются кратчайшими в области $\exp(B^0(0;\epsilon)) \subset S$, содержащей точку m.

Приложив дополнительные усилия, можно доказать (смотри СТРОГИЕ ТОЛСТЫЕ КНИГИ), что каждая точка S обладает выпуклой окрестностью U, т. е. такой окрестностью, где любые две точки можно соеденить кратчайшей геодезической (кратчайшая геодезическая обычно называется отрезком).

Замечание. Понятие геодезической требует наличия на многообразии только связности. Поэтому одна лишь связность на многообразии позволяет ввести отображение exp и изучить его свойства. Как только появляется риманова (или псевдориманова) метрика на многообразии, появляется и согласованная с ней связность Леви-Чивита. Здесь речь идет об отображениии exp относительно именно этой связности.

Вопрос: можно ли построить связность Леви-Чивита на симплектическом многообразии?