5 Связности Леви-Чивита левоинвариантных метрик на группе Ли

• Группа Ли – это дифференцируемое многообразие G вместе с групповой операцией $G \times G \to G$, согласованной со структурой многообразия в том смысле, что отображение $(x, y) \to (xy^{-1})$ из $G \times G$ в G является гладким.

Мы будем, как правило, рассматривать матричные группы Ли. Например, группу SO(3) ортогональных матриц третьего порядка с определителем 1. Напомним, что

$$\mathrm{SO}(3) = \left\{ O \in M_3(\mathbb{R}) \ \middle| O \cdot O^T = E \right\}, \quad \text{здесь } E \text{ – единичная матрица } 3 \times 3.$$

Другой поучительный пример – группа SL(2, $\mathbb{R}$) (или SL(2, $\mathbb{C}$)), состоящая из вещественных (комплексных) унимодулярных матриц 2×2.

• • Напомним, что касательное пространство в единице к группе Ли наделяется структурой алгебры Ли.

Пример 1. Дифференцируя по t (в точке $t = 0$) кривую $O(t)$, $O(0) = E$, лежащую в группе SO(3), получим в качестве вектора касательного пространства матрицу $\dot{O}(t)\,|_{t=0} = K$, которая удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt}\left(O(t) \cdot O^T(t)\right)|_{t=0} = K + K^T = 0.$$

Тем самым касательное пространство T_e состоит из кососимметрических матриц K, $K = -K^T$.

В трехмерном линейном пространстве кососимметрических 3×3 матриц скобка Ли вводится по правилу:

$$[K_1, K_2] = K_1 K_2 - K_2 K_1$$

Задача 1. Проверьте, что $[K_1, K_2]$ – кососимметрическая матрица.

Задача 2. Определим $\exp X$, где X – матрица, с помощью сходящегося ряда

$$\exp X = E + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \ \dots \ + \frac{X^n}{n!} + \ \dots$$

Докажите, что $\exp K \in \mathrm{SO}(3)$, если K – кососимметрическая 3×3 - матрица.

Контрольный вопрос. Является ли отображение $\exp : T_e \to$SO(3), $K \to \exp(K)$, сюръективным?

••• На группе Ли G есть два замечательных семейства диффеоморфизмов: левые сдвиги $L_x : G \to G$, $L_x(y) = xy$ и правые сдвиги $R_x : G \to G$, $R_x(y) = yx$.

Заметим, что любой левый сдвиг коммутирует с любым правым.

$\bullet\bullet\bullet\bullet$ Риманова метрика на группе G называется левоинвариантной, если

$$\langle u, v\rangle_y = \langle (dL_x)u, (dL_x)v\rangle_{L_x y} \qquad (*)$$

(здесь $\langle u, v\rangle_y$ – скалярное произведение в касательном пространстве $T_y = (dL_y)(T_e)$ в точке $y \in G$).

Ясно, что такое правоинвариантная метрика и что такое биинвариантная метрика.

Пример 2. В касательном пространстве T_e группы SO(3) введем скалярное произведение по правилу

$$\langle K_1, K_2\rangle = tr(K_1 K_2^T) = -tr(K_1 K_2).$$

Ясно, что $\langle K_1, K_2\rangle = \langle K_2, K_1\rangle$ (почему?) и что $\langle K_1, K_2\rangle \geq 0$, причем $\|K_1\| = 0 \Leftrightarrow K_1 = 0$
(указание: если $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix}$, то $-trK^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$).

Любую метрику на пространстве T_e можно однозначно продолжить до левоинвариантной метрики на группе, полагая

$$\langle u, v\rangle_y = \left\langle (dL_y^{-1})u, (dL_y^{-1})v\right\rangle_e$$

Задача 3. Показать, что так построенная левоинвариантная метрика в примере 2 является одновременно и правоинвариантной.

$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ Структуру алгебры Ли в касательном пространстве T_eG к группе Ли G в единице можно ввести другим путем, который нам ближе по духу. А именно, назовем векторное поле X на группе G левоинвариантным, если $dL_g(X) = X$ для всех $g \in G$. Нетрудно понять, что такое поле однозначно определяется своим значением в T_eG.

И обратно, любой вектор $X_e \in T_eG$ однозначно определяет левоинвариантное векторное поле (которое из антипедагогических соображений будет обозначаться той же буквой X) $X(g) = (dL)_g X_e$.

Как и на любом многообразии, можно рассмотреть коммутатор $[XY]$ (скобку Ли) двух левоинвариантых векторных полей X и Y. Оказывается, что $[XY]$ – левоинвариантное векторное поле. Если это так, то на T_eG можно определить скобку Ли по формуле $[X_e, Y_e] = [X, Y]_e$.

Отступление. Докажем левоинвариантность поля $[XY]$. Заметим, что оператор левого сдвига $L_x : G \to G$ естественно действует как линейный оператор на пространстве гладких функций $f \in C^\infty(G)$ на группе G по формуле

$$(L_x^* f)(y) = f(xy)$$

Левоинвариантность поля X, рассматриваемого как дифференциальный оператор, в точности означает, что операторы X и L^* коммутируют (как два оператора на пространстве $C^\infty(G)$), т. е.

$$X(L_y^* f) = L_y^*(Xf) \quad \text{для любого } y \in G.$$

Но тогда имеем,

$$[XY](L_y^*f) = X(Y(L_y^*f)) - Y(X(L_y^*f)) = X(L_y^*(Yf) - Y(L_y^*(Xf)) =$$

$$= L_y^*(X(Yf)) - L_y^*(Y(Xf)) = L_y^*([XY]f), \quad \text{ч. т. д.}$$

Переходим к главной теме этой лекции. Наша цель – научиться явно вычислять ковариантную производную Леви-Чивита левоинвариантной метрики на группе Ли G. Это дает нам возможность вычислять гауссовы кривизны на группах Ли. Вычисления предварим несколькими замечаниями.

Замечание 1. Векторные поля на группе G образуют модуль над кольцом $C^\infty(G)$ гладких функций. Базисом этого модуля служат левоинвариантные векторные поля.

Задача 4. Доказать, что $rk_{C^\infty(G)}(Vect(G)) = dim_{\mathbb{R}}(T_e(G))$.

Отсюда следует, между прочим, что достаточно научиться вычислять $\nabla_X Y$, где X и Y – левоинвариантные векторные поля.

Замечание 2. Если ∇ – связность Леви-Чивита левоинвариантной метрики на группе Ли G, то $\nabla_X Y$ – левоинвариантное векторное поле, если таковы поля X и Y (почему?).

Замечание 3. Если X и Y – левоинвариантные векторные поля, то $\langle X, Y\rangle = const$.

Замечание 4. Связность Леви-Чивита обладает следующими свойствами:

а) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [XY]$ (по определению)

б) если Y и Z – левоинвариантные векторные поля, то $(\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z) = 0$ (указание: воспользоваться основным свойством $\partial_X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$ и замечанием 3).

Рассмотрим тензор $T(X, Y, Z)$, который на тройке левоинвариантных векторных полей принимает значение $(\nabla_X Y, Z)$. Тензор T кососимметричен по последним аргументам (Замечание 4 б))

$$T(X, Y, Z) = -T(X, Z, Y) \qquad (1).$$

Что касается перых двух аргументов, то здесь немного хитрее:

$$T(X, Y, Z) - T(Y, X, Z) = ([XY], Z) \qquad (2).$$

Я утверждаю, что такой тензор единственным образом восстанавливается по алгебре Ли T_eG и метрике. В самом деле,

$$T(X, Y, Z) = -T(X, Z, T) = -T(Z, X, Y) - ([XZ], Y) = -(-T(Y, Z, X) - ([ZY], X)) - ([XZ], Y) =$$

$$= -(-(-(T(X, Y, Z) - ([YX]Z)) - ([ZY], X))) - ([XZ], T) =$$

$$= -T(X,Y,Z) - ([YX],Z) + ([ZY],X) - ([XZ],Y) \quad \text{(объясните!)}$$

Следовательно,

$$T(X,Y,Z) = \frac{1}{2}([XY],Z) + \frac{1}{2}([ZY],X) - \frac{1}{2}([XZ],Y) = \frac{1}{2}([XY],Z) - \frac{1}{2}([YZ],X) - \frac{1}{2}([XZ],Y) \quad (3).$$

Если через $A(X,Y)$ обозначить такую билинейную форму на алгебре Ли T_eG со значениями в T_eG, что

$$([YZ],X) = (A(X,Y),Z),$$

то из (3) получается, что

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([XY] - A(X,Y) - A(Y,X))$$

для левоинвариантных векторных полей X и Y.

Задача 5*. Если рассматриваемая левоинвариантная метрика биинвариантна, то $\nabla_X Y = \frac{1}{2}\,[XY]$.

Задача 6. Вычислить гауссову кривизну $G(X,Y) = (R(X,Y)X,Y)$ на SO(3) для биинвариантной метрики из примера 2.

Задача 7*. Используя результат задачи 5, показать, что на группе Ли G с биинвариантной метрикой однопараметрические подгруппы $\exp tX$, $X \in T_eG$, и только они, являются геодезическими.