Листок 5

Вокруг теоремы Хопфа-Ринова и похожих на нее вещей.

1. Пусть $f : X \to Y$ – локальная изометрия римановых многообразий. Доказать, что f не может увеличивать расстояния между точками.

2. Пусть $f : X \to Y$ – накрытие римановых многообразий и одновременно локальная изометрия. Предположим, что шар $B^0_r(y)$ является правильно накрытой окрестностью точки $y \in Y$ (это означает, что $f^{-1}(B^0_r(y))$ есть дизъюнктное объединение открытых множеств $U_i \subset X$, и сужение $f : U_i \to B^0_r(y)$ является гомеоморфизмом на шар). Доказать, что в этом случае расстояние между различными точками из $f^{-1}(y)$ не меньше, чем $2r$.

3. Пусть $f : X \to Y$ – накрытие и локальная изометрия. Доказать, что из полноты Y следует полнота X. Верно ли обратное утверждение?

4. Пусть X – полное риманово многообразие, а Y – связное риманово многообразие, любые две точки которого можно соединить единственной геодезической. Предположим, что $f : X \to Y$ – локальная изометрия. Доказать, что f – глобальная изометрия.

5. Пусть X – полное, некомпактное риманово многообразие, $x \in X$. Доказать, что X содержит луч $\gamma(t),\ \gamma(0) = x$ (луч – это геодезическая при $0 \le t \le \infty$, которая является кратчайшей между $\gamma(0)$ и $\gamma(t)$ для любого $t \in (0, \infty)$).

6. Компактное риманово многообразие является полным. Доказать.

Уравнение Якоби.

7. (*) Пусть X – риманово многообразие, $x \in X$. Существуют такая окрестность U точки x и число ϵ, что для каждой точки $y \in U$ отображение $\exp_y$ диффеоморфно отображает шар $B^0(0, \delta) \subset T_yX$ и $\exp_y(B^0(0, \delta)) \supset U$. Доказать.

8. С помощью утверждения задачи 7 доказать, что любые две точки x_1 и x_2 из окрестности U можно соединить единственной кратчайшей длины $< \delta$.

9. Пусть J – поле Якоби вдоль геодезической $\gamma(t)$ с полем скоростей T. Доказать, что $(J, T)''_t = 0$ (или $\nabla^2_T(J, T) = 0$, если Вам так проще). Вывести отсюда, что
$$J = J_0 + (at + b)T, \quad \text{где поле} \quad J_0 \perp T.$$

   Верно ли, что J_0 – поле Якоби?

Помни.

10. Пусть $R(X,Y)Z = (\nabla_{[XY]} - [\nabla_X, \nabla_Y])Z$ – тензор кривизны. Доказать, что

    а) $R(X,Y) = -R(Y,X)$

    б) $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$ (тождество Бианки)

    в) $(R(X,Y)Z, W) = (R(Z,W)X, Y)$

11. Нужно убедить себя в том, что 10 в) означает, что кривизна – это линейный самосопряженный оператор на пространстве бивекторов $\Lambda^2 TM : R(X \wedge Y)$ – это такой бивектор, что $\langle R(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle = (R(X,Y)Z, W)$ для любого бивектора $Z \wedge W$ (фигурные скобки обозначают естественное скалярное произведение в пространстве бивекторов, индуцированное круглыми скобками в пространстве TM)