Логика и алгоритмы 2011. Задание 8.

Теории первого порядка.

Определение 1. $T \vdash A$ означает, что формула A выводима в теории T. $\vdash A$ означает, что A выводима в исчислении предикатов с равенством. $T \vdash S$ означает, что все формулы из S выводимы в T. $T \equiv S$ означает $T \vdash S$ и $S \vdash T$. Теория T называется *конечно аксиоматизируемой*, если $T \equiv S$ для некоторого конечного множества формул S. T называется *полной*, если T непротиворечива и для любой замкнутой формулы A в языке T имеет место $T \vdash A$ или $T \vdash \neg A$.

115. Выведите следующие правила в исчислении предикатов (см. стр. 2):

    (a) $T \vdash A(x)$ тогда и только тогда, когда $T \vdash \forall x\, A(x)$;

    (b) (правило силлогизма) если $T \vdash (A \to B)$ и $T \vdash (B \to C)$, то $T \vdash (A \to C)$;

    (c) (правило контрапозиции) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\neg B \to \neg A)$;

    (d) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\exists x\, A \to \exists x\, B)$;

    (e) $\vdash \forall x\, (A \to B) \wedge \exists x\, A \to \exists x\, B$.

В решении всех следующих задач можно пользоваться теоремами о полноте и о компактности для логики предикатов.

116. Множество $\mathrm{Th}(M)$ всех предложений истинных в модели M называется *элементарной теорией модели* M. Докажите: теория T полна тогда и только тогда, когда существует модель M для которой $T \equiv \mathrm{Th}(M)$.

117. Докажите, что $\mathrm{Th}(\mathbb{R}; +, \cdot) \neq \mathrm{Th}(\mathbb{Q}; +, \cdot)$.

118. Всякая непротиворечивая теория T имеет полное расширение $S \vdash T$ той же сигнатуры. (Вспомним лемму Цорна.)

119. Докажите, что теория полей нулевой характеристики (a) неполна, (b) не является конечно аксиоматизируемой.

120. Если теория имеет сколь угодно большие (по мощности) конечные модели, то она имеет и некоторую бесконечную модель. Выведите отсюда, что не существует теории, моделями которой являются в точности (a) все конечные циклические группы, (b) все конечные поля.

121. Если формула A выполнена на всех бесконечных группах, то A выполнена на всех конечных группах мощности больше некоторого $n \in \mathbb{N}$.

122. *Спектром* формулы A назовём множество $\{n \in \mathbb{N} \mid A \text{ имеет модель мощности } n\}$.

(a) Постройте формулу в сигнатуре с равенством, которая имеет спектр $\{2,3\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}$;

(b) Докажите, что совокупность спектров всех формул (произвольной сигнатуры) замкнута относительно операций пересечения и объединения;

(c) Существует ли формула, спектр которой есть множество всех чётных чисел?

(d) Существует ли такая формула в сигнатуре только с символом равенства?

123. (теорема Эрбрана) Если $\vdash \exists x\, A(x)$, где A — бескванторная формула, то найдётся конечная последовательность термов $t_1, \dots, t_n$, такая что $\vdash A(t_1) \vee \dots \vee A(t_n)$. *Указание.* Рассуждайте от противного и воспользуйтесь теоремой о компактности.

124. Пусть $B = \exists x_1 \ldots \exists x_n\, A$ — формула в языке без функциональных символов и констант, где A бескванторна. Докажите, что если B выполнима, то она имеет конечную модель мощности не выше n.

Справка: аксиомы и правила вывода исчисления предикатов

Аксиомы:

A1. Тавтологии логики высказываний;

A2. $(\forall x A) \to A[x/t]$, если переменные терма t не связываются кванторами при подстановке вместо свободной переменной x в A;

A3. $A[x/t] \to (\exists x A)$, при том же условии;

A4. Аксиомы равенства:

1. $x = y \to y = x$;
2. $x = y \wedge y = z \to x = z$;
3. $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \to (P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \dots, y_n))$;
4. $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$.

Схему аксиом A1 мы понимаем следующим образом. Если $A(p_1, \dots, p_n)$ — тавтология и $C_1, \dots, C_n$ — любые формулы, то формула $A[p_1/C_1, \dots, p_n/C_n]$ есть аксиома.

Правила вывода: R1. $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ R2. $\dfrac{A \to B}{A \to \forall x B}$ R3. $\dfrac{B \to A}{\exists x B \to A}$

В правилах R2 и R3 переменная x не входит свободно в A.