

Программа коллоквиума по курсу
«Логика и алгоритмы» 28.11.11

1. Отношения эквивалентности. Соответствие между разбиениями множества и отношениями эквивалентности на нём. Фактормножество. Равномощность множеств. Множество Y^X всех функций $f : X \rightarrow Y$. Биекция между $\mathcal{P}(X)$ и 2^X .
2. Счётные множества. Подмножество счётного множества конечно или счётно. Всякое бесконечное множество имеет счётное подмножество. Объединение счётного множества счётных множеств счётно. Счётность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, \mathbb{N}^k и \mathbb{N}^* (множества всех конечных последовательностей натуральных чисел). Равномощность \mathbb{R} и $2^{\mathbb{N}}$.
3. Сравнение мощностей множеств. Теорема Кантора–Бернштейна. Счётность множества (вещественных) алгебраических чисел. Несчётность \mathbb{R} , множество $\mathcal{P}(X)$ не равномощно X . Равномощность \mathbb{R} и канторовского множества.
4. Частично упорядоченные множества. Терминология: строгий и нестрогий порядок, линейный порядок, максимальный элемент, наибольший элемент, верхняя грань множества, цепь в частично упорядоченном множестве. Диаграммы конечных множеств. Операции суммы и произведения линейно упорядоченных множеств. Примеры: $\omega + \omega$, $\omega \times \omega$.
5. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку. Из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.
6. Аксиома выбора. Теорема Цермело (всякое множество может быть вполне упорядочено). Лемма Цорна. Доказательство их эквивалентности. Следствие о том, что любые два множества сравнимы по мощности.
7. Логика высказываний, понятие формулы. Таблицы истинности, булевы функции. Теорема о представимости всякой булевой функции формулой логики высказываний. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме.
8. Язык логики предикатов. Понятие термина и формулы. Связанные и свободные вхождения переменных в формулу. Понятие модели, примеры моделей. Определение истинности формулы в модели.
9. Множества, предикаты и функции, выразимые в данной модели. Существование невыразимых множеств в модели $(\mathbb{N}, +, \times)$. Гомоморфизмы, изоморфизмы, автоморфизмы моделей. Сохранение выразимых предикатов при изоморфизме. Метод доказательства невыразимости с помощью автоморфизма.
10. Теорема о предварённой нормальной форме для формул логики предикатов.

11. Исчисление предикатов. Формальные теории. Выводимость в теории, теорема о дедукции. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства). Теорема о компактности. Существование нестандартных моделей арифметики.