ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТОПОЛОГИИ

ЛИСТОК 2: УМНОЖЕНИЕ В КОГОМОЛОГИЯХ

Осень 2011 года

Факт: Пусть M – компактное ориентируемое многообразие без края, и когомологические классы $\alpha \in H^k(M,\mathbb{Z})$ и $\beta \in H^l(M,\mathbb{Z})$ переходят при изоморфизме Пуанкаре в гомологические классы, представленные ориентированными подмногообразиями a и b (размерности $n-k$ и $n-l$, соответственно), пересекающимися в M трансверсально. Тогда пересечение подмногообразий $a \cap b$ является подмногообразием размерности $n-k-l$, представляющим гомологический класс, переходящий при изоморфизме Пуанкаре в $\alpha\beta \in H^{k+l}(M,\mathbb{Z})$. То же самое верно в неориентируемом случае для когомологий и гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$.

Задача 1. Уточните, как нужно ориентировать пересечение $a \cap b$.

Задача 2. Сформулируйте аналог вышеприведенного утверждения для неориентируемого многообразия M и когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

Задача 3. Вычислите умножение в когомологиях

а) n-мерной сферы S^n, б) двумерной сферы с двумя склеенными точками, в) двумерного тора T^2, г) n-мерного тора T^n, д) сферы с g ручками, е) комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ — с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/2$;

ж) вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, з) вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^n$, и) бутылки Клейна K^2 — с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$;

к) вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^n$, л) бутылки Клейна K^2 — с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

Задача 4. Существует ли отображение

а) T^2 в S^2, индуцирующее изоморфизм групп $H_2(-,\mathbb{Q})$;

б) S^2 в T^2, индуцирующее изоморфизм групп $H_2(-,\mathbb{Q})$;

в) сферы с g_1 ручками в сферу с g_2 ручками, индуцирующее изоморфизм групп $H_2(-,\mathbb{Q})$ (в зависимости от g_1 и g_2);

г) $\mathbb{C}P^3$ в $\mathbb{C}P^2$, индуцирующее изоморфизм групп π_2;

д) $\mathbb{R}P^3$ в $\mathbb{R}P^2$, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп?

Задача 5. Докажите, что не существует нечетного отображения $S^n \to S^{n-1}$.