Глава 4

Формулы Плюккера

Плоские кривые объединяются в пары — каждой плоской кривой можно сопоставить двойственную ей кривую, причем двойственная кривая к двойственной совпадает с исходной. Кривая, двойственная к гладкой, как правило, оказывается особой, поэтому при изучении двойственности нельзя обойтись рассмотрением лишь гладких кривых. Более того, при этом нельзя ограничиться лишь кривыми с простейшими особенностями — точками трансверсального самопересечения. Однако пары двойственных кривых, имеющих лишь точки трансверсального самопересечения и точки возврата (каспы), образуют открытое подмножество в пространстве пар двойственных кривых заданных степеней, что делает естественным изучение таких пар. Формулы Плюккера представляют собой соотношения на числа особенностей различных видов у пары двойственных кривых заданных степеней.

4.1 Проективная двойственность

С каждым векторным пространством V ассоциировано двойственное векторное пространство V^* — это векторное пространство линейных функционалов $f : V \to \mathbb{C}$ на V. Ниже мы будем рассматривать лишь конечномерные векторные пространства. Двойственное пространство имеет ту же размерность, что и исходное пространство, а двойственное пространство к V^* естественно изоморфно векторному пространству V: каждая точка $v \in V$ определяет линейный функционал на V^*, $v : f \mapsto f(v)$ для $f \in V^*$.

Проективизация PV^* это двойственное проективное пространство к проективизации PV пространства V. Мы покажем, как сопоставить плоской кривой $C \subset \mathbb{CP}^2$ двойственную плоскую кривую C^* в двойственной проективной плоскости $(\mathbb{CP}^2)^*$.

Прямой l в $\mathbb{CP}^2$ сопоставляется точка $l^* \in (\mathbb{CP}^2)^*$ — это ненулевой линейный функционал, обращающийся в нуль на l. Такой функционал единственный с точностью до умножения на ненулевую постоянную. Тем самым, он корректно определяет точку двойственной плоскости. Наоборот, прямой в двойственной плоскости сопоставляется точка в исходной плоскости. Если прямая в $\mathbb{CP}^2$ задана линейным уравнением $ax + by + cz = 0$, то соответствующая ей точка в двойственной плоскости имеет координаты $(a : b : c)$. Проективная двойственность обладает следующим важным свойством: точки A и B лежат на прямой l тогда и только тогда, когда прямые A^* и B^* пересекаются в точке l^*. Это свойство непосредственно вытекает из определения двойственности.

Гладкой кривой $C \subset \mathbb{CP}^2$ *двойственная кривая* $C^* \subset (\mathbb{CP}^2)^*$ сопоставляется следующим образом. Каждой точке кривой C сопоставим прямую l, касающуюся кривой C в этой точке, а прямой l — точку l^*. Множество всех точек l^*, полученных таким образом, образует кривую C^*.

Упражнение 4.1.1. а) Докажите, что эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ двойствен эллипс $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$.

б) Докажите, что любой неособой кривой второй степени двойственна кривая второй степени.

Упражнение 4.1.2. Рассмотрим случай вещественно двойственных кривых. Докажите, что выпуклой кривой двойственна выпуклая кривая. (Замкнутая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$ называется *выпуклой*, если она ограничивает выпуклую фигуру.)

Двойственная кривая к особой кривой C определяется как замыкание в $(\mathbb{CP}^2)^*$ множества точек l^*, отвечающих касательным прямым к C в гладких точках. Комплексная кривая, двойственная гладкой кривой степени большей 2, всегда негладкая. Однако это по-прежнему алгебраическая кривая.

Теорема 4.1.3. *Если кривая C алгебраическая, то кривая C^* тоже алгебраическая.*

Доказательство. Пусть кривая C задается в $\mathbb{CP}^2$ уравнением $F(x, y, z) = 0$. Касательная к C в точке $(x_0 : y_0 : z_0) \in C$ задается уравнением

$$xF_x + yF_y + zF_z = 0,$$

где производные F_x, F_y и F_z берутся в точке (x_0, y_0, z_0). Двойственная кривая C^* состоит из точек с координатами $(F_x : F_y : F_z)$. Требуется доказать, что переменные $x_1 = F_x(x_0, y_0, z_0), y_1 = F_y(x_0, y_0, z_0)$ и $z_1 = F_z(x_0, y_0, z_0)$ связаны некоторым однородным алгебраическим соотношением $G(x_1, y_1, z_1) = 0$. Добавим к соотношениям $x_1 = F_x, y_1 = F_y, z_1 = F_z$ соотношение $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ (или эквивалентное ему соотношение $x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 = 0$). Тогда из этих четырех соотношений можно будет последовательно исключить x_0, y_0 и z_0. В результате получим одно алгебраическое соотношение между x_1, y_1 и z_1.

Исключение производится следующим образом. Пусть у нас есть четыре соотношения $f_1 = 0, \ldots, f_4 = 0$ на переменные $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$. Заменим каждую пару многочленов (f_1, f_4), (f_2, f_4), (f_3, f_4), рассматриваемых как многочлены от x_0, результантом этой пары. Получим тройку многочленов

g_1, g_2, g_3, уже не зависящих от переменной x_0. Теперь заменим каждую из двух пар многочленов (g_1, g_3) и (g_2, g_3), рассматриваемых как многочлены от y_0, их результантом. Затем таким же способом исключим переменную z_0 из полученной пары многочленов (h_1, h_2). Приравнивание к нулю полученного в результате однородного многочлена от переменных x_1, y_1, z_1 и дает уравнение двойственной кривой. □

Степень кривой C^* называют *классом* кривой C. Иными словами, класс кривой C — это количество точек пересечения кривой C^* с прямой общего положения, т. е. количество касательных к кривой C, проходящих через точку общего положения. Класс неособой кривой зависит только от ее степени.

Пример 4.1.4. Вычислим двойственные кривые к кубическим кривым семейства

$$y^2z - x^3 + axz^2 = 0. \tag{4.1}$$

Система уравнений на двойственные переменные x_1, y_1, z_1 имеет вид

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x^2 - az^2 & = & 0 \\ y_1 - 2yz & = & 0 \\ z_1 - y^2 - 2axz & = & 0 \\ x_1x + y_1y + z_1z & = & 0. \end{array}$$

Исключая x из первого и третьего уравнения в паре с четвертым (во втором уравнении эта переменная отсутствует), получаем систему

$$\begin{array}{rcl} x_1^3 - ax_1^2z^2 + 3y_1^2y^2 + 6y_1yz_1z + 3z_1^2z^2 & = & 0 \\ y_1 - 2yz & = & 0 \\ x_1y^2 - x_1z_1 - 2ay_1yz - 2az_1z^2 & = & 0. \end{array}$$

Исключение переменной y из второго уравнения в паре с первым и третьим дает систему

$$\begin{array}{rcl} 4x_1^3z^2 - 4ax_1^2z^4 + 12y_1^2z_1z^2 + 3y_1^4 + 12y_1^2z_1z^2 & = & 0 \\ x_1y_1^2 - 4x_1z_1z^2 - 4ay_1^2z^2 - 8az_1z^4 & = & 0. \end{array}$$

Наконец, исключая z, получаем уравнение двойственной кривой

$$4x_1^3z_1^3 + 27y_1^2z_1^4 - a(ax_1^4y_1^2 + 24ax_1y_1^4z_1 + 30x_1^2y_1^2z_1^2 + 4x_1^5z_1 + 4a^2y_1^6) = 0. \tag{4.2}$$

Значит, при общем значении параметра a двойственная кривая к кубике имеет степень 6, т.е. класс кубики равен 6.

При $a = 0$ кривая семейства вырождается в полукубическую кривую

$$y^2z - x^3 = 0,$$

а двойственная — в полукубическую кривую

$$4x_1^3 + 27y_1^2z_1 = 0.$$

Значит, класс полукубической кривой равен 3.

Рис. 4.1: Предельная касательная

Для двойственных кривых выполняется соотношение $(C^*)^* = C$. Действительно, пусть l_1^* и l_2^* — две близкие точки кривой C^*. Им соответствуют касательные l_1 и l_2 к кривой C. Точке A исходной плоскости, в которой пересекаются прямые l_1 и l_2, соответствует прямая A^* в двойственной плоскости, проходящая через точки l_1^* и l_2^* (рис. 4.1). При стремлении точки l_2^* к точке l_1^* прямая A^* стремится к касательной, проведенной к кривой C^* в точке l_1^*. При этом точка A стремится к точке, в которой прямая l_1 касается кривой C. Значит, касательным к двойственной кривой соответствуют точки исходной кривой, что и требовалось.

Упражнение 4.1.5. Вычислите двойственную кривую к кривой (4.2) и убедитесь, что она совпадает с кривой (4.1).

Если кривая C неособая, то кривая C^* не обязательно будет неособой. Дело в том, что двойной касательной соответствует точка самопересечения, а касательной в точке перегиба соответствует точка возврата (рис. 4.2) двойственной кривой. Первое из этих свойств очевидно, поэтому обсудим лишь второе свойство. Его можно исследовать локально, в окрестности точки перегиба.

Рассмотрим кривую $y = x^3$, для которой точка (0,0) является точкой перегиба. Касательная к этой кривой в точке кривой с координатами (x_0, y_0) задается уравнением $y - y_0 = 3x_0^2(x - x_0)$, т. е.

$$-3x_0^2x + y + 2x_0^3 = 0.$$

Поэтому точке $(x_0 : x_0^3 : 1) \in \mathbb{CP}^2$ сопоставляется точка $(-3x_0^2 : 1 : 2x_0^3) = (-3x_0^{-1}/2 : x_0^{-3}/2 : 1)$ двойственной кривой. Таким образом, двойственная кривая состоит из точек $(x_1 : y_1 : 1)$, $x_1 = -3x_0^{-1}/2$, $y_1 = x_0^{-3}/2$. Эта кривая задается уравнением $(-2x_1/3)^3 = 2y_1$. Кривая получилась почти такая же, но при этом точке (0:0:1) исходной кривой соответствует точка (0:1:0) двойственной кривой. В окрестности точки (0:1:0) двойственной кривой удобно использовать координаты $(x_1 : 1 : z_1)$. При этом $x_1 = -3x_0$ и $z_1 = 2x_0^3$, т. е. в этих координатах двойственная кривая задается уравнением $27z_1^2 + x_1^3 = 0$. Таким образом, точке перегиба (рис. 4.2 а)) двойственна точка возврата (рис. 4.2 б)).

Эллипсы $\dfrac{x^2}{a^2} + a^2y^2 = 1$ и $a^2x^2 + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ двойственны друг другу, поэтому кривая, состоящая из пары этих эллипсов, двойственна сама себе. Воспользовавшись

Рис. 4.2: а) Двойная касательная, касательная в точке перегиба и б) особенности двойственной кривой

Рис. 4.3: Двойственные кривые

зовавшись этим свойством, а также тем, что точке перегиба двойственна точка возврата, а двойной касательной двойственна точка самопересечения, нетрудно убедиться, что кривые, изображенные на рис. 4.3, двойственны друг другу.

4.2 Формулы Плюккера для неособых кривых

Мы уже знаем некоторые численные характеристики кривых, двойственных к гладким. Пусть C — гладкая проективная кривая. Ее класс — это степень двойственной к ней кривой C^*, т.е. число точек пересечения двойственной кривой с прямой общего положения на двойственной проективной плоскости. Прямая на двойственной плоскости отвечает некоторой точке исходной плоскости и состоит из всех прямых, проходящих через эту точку. В случае общего положения точки пересечения это прямые, касающиеся кривой C. Если C — гладкая кривая степени n, то, как мы знаем, через точку общего положения вне кривой C проходит $n(n-1)$ касательных к кривой C (см. теорему 2.2.7). Значит,

Утверждение 4.2.1. *Класс n^* неособой плоской кривой степени n равен $n(n-1)$.*

Из этого утверждения непосредственно следует, что при $n > 2$ кривая C^*, двойственная к гладкой кривой C степени n, особа. Действительно, если бы она была неособа, то степень двойственной к ней кривой C^{**} равнялась бы $n(n-1)(n(n-1)-1)$, т.е. была бы больше n и, следовательно, кривая C^{**} не могла бы совпадать с кривой C.

Количество точек возврата на кривой C^* также легко определить. Точки возврата двойственной кривой взаимно однозначно соответствуют точкам перегиба исходной. Как мы знаем, у общей гладкой кривой степени n имеется $3n(n-2)$ точек перегиба (см. упражнение 2.3.2). Поэтому

Утверждение 4.2.2. *Кривая, двойственная общей неособой плоской кривой степени n, имеет $k^* = 3n(n-2)$ точек возврата.*

Теперь у нас есть необходимые данные для подсчета числа двойных точек на кривой, двойственной гладкой. Кривая C^* является образом гладкой кривой C при голоморфном отображении проективной двойственности. Это отображение почти всюду взаимно-однозначно и невырождено. Это означает, что гладкая кривая C является *нормализацией* особой кривой C^*.

Будем называть *родом* особой кривой род ее нормализации. Если бы кривая C^* была гладкой степени $n(n-1)$, то ее род равнялся бы $(n(n-1)-1)(n(n-1)-2)/2$. Наличие особых точек приводит к уменьшению рода. При этом особая точка каждого типа приводит к уменьшению рода на одну и ту же величину.

Кривая, двойственная к гладкой кривой общего положения, имеет особые точки двух типов — каспы (т.е., точки возврата, полукубические острия) и точки трансверсального самопересечения. Полукубическая парабола $y^2 = x^3z$ имеет единственную особую точку — касп — и нормализуется рациональной кривой, тогда как гладкая кривая третьей степени имеет род 1. Тем самым, появление каспа на кривой данной степени понижает ее род на 1. С другой стороны, как мы уже знаем (см. п. 1.3), появление точки простого самопересечения также снижает род кривой на 1. Таким образом, число точек простого самопересечения на двойственной кривой равно

$$\begin{aligned}\delta^* &= \frac{1}{2}(n^*-1)(n^*-2) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - k^* \\ &= \frac{1}{2}(n(n-1)-1)(n(n-1)-2) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 3n(n-2) \\ &= \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3).\end{aligned}$$

Тем самым, мы доказали следующее утверждение:

Утверждение 4.2.3. *Кривая, двойственная к общей гладкой кривой степени n, имеет*

$$\delta^* = \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$$

точек самопересечения, т.е. к общей гладкой кривой степени n можно провести $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$ двойных касательных.

При $n=3$ полученное выражение для δ^* обращается в нуль, что согласуется с тем, что кривая, двойственная к гладкой кубике, не имеет точек самопересечения (но имеет 9 точек возврата). При $n=4$ имеем $\delta^* = 28$: к общей гладкой кривой степени 4 можно провести 28 двойных касательных.

4.3 Формулы Плюккера для особых кривых

Распространим теперь выведенные в предыдущем параграфе формулы на случай, когда у кривой C также есть особые точки — точки двукратного самопересечения и точки возврата. Для общей такой кривой C данной степени двойственная ей кривая также не имеет особенностей другого вида.

Пусть n — степень кривой C, δ — число ее точек самопересечения, k — число точек возврата; n^*, δ^* и k^* — аналогичные числа для кривой C^*.

Обобщения выведенных нами формул на случай особых кривых имеют следующий вид, называемый *формулами Плюккера*:

$$\begin{aligned} n^* &= n(n-1) - 2\delta - 3k, & 3n(n-2) &= k^* + 6\delta + 8k, \\ n &= n^*(n^*-1) - 2\delta^* - 3k^*, & 3n^*(n^*-2) &= k + 6\delta^* + 8k^*. \end{aligned}$$

Эти соотношения не являются независимыми. Легко проверить, что любое из них можно представить в виде линейной комбинации трех остальных соотношений.

Прежде всего докажем формулу $n(n-1) = n^* + 2\delta + 3k$; из нее переходом к двойственной кривой можно получить формулу $n^*(n^*-1) = n + 2\delta^* + 3k^*$.

Фиксируем точку $P = (p_1 : p_2 : p_3) \in \mathbb{CP}^2$. Будем считать, что по отношению к рассматриваемой кривой $f = 0$ точка P является точкой общего положения, т. е. из нее можно провести ровно n^* различных касательных к кривой. Рассмотрим разложение

$$f(X + tP) = f(X) + t\sum p_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(X) + \frac{t^2}{2}\sum p_i p_j f_{ij}(X) + \ldots$$

Это разложение показывает, что прямая PX пересекает кривую $f = 0$ в точке X не менее чем двукратно тогда и только тогда, когда точка X лежит на пересечении кривых $f = 0$ и $g = 0$, где $g(X) = \sum p_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)$ — полином степени $n - 1$. Таким образом, точки пересечения кривых $f{=}0$ и $g = 0$ бывают следующих трех типов:

тип (1): точки касания кривой $f = 0$ с касательными, проведенными из точки P;

тип (2): точки самопересечения кривой $f = 0$;

тип (3): точки возврата кривой $f = 0$.

По теореме Безу количество точек пересечения кривых $f = 0$ и $g = 0$ с учетом кратности равно $n(n-1)$. Поэтому формула $n(n-1) = n^* + 2\delta + 3k$ будет доказана, если мы убедимся, что точки типа (1) — однократные точки пересечения кривых $f = 0$ и $g = 0$, точки типа (2) — двукратные, а точки типа (3) — трехкратные. Это вычисление можно произвести локально.

Тип (1). Пусть $X = (0 : 0 : 1), P = (p_x : 0 : p_z)$, где $p_x \neq 0$. Прямая PX, задаваемая уравнением $y = 0$, пересекает кривую $f = 0$ в точке X двукратно. Это означает, что $f(x, y, z) = z^{n-1}y + z^{n-2}(ax^2 + bxy{+}cy^2) + \ldots$, причем $a \neq 0$. В самом деле, пусть

$$f(x, y, z) = a_0 z^n + (a_1 x + b_1 y)z^{n-1} + (a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2)z^{n-2} + \ldots$$

Уравнение $f(x,0,z)=0$, т. е. $a_0z^n+a_1xz^{n-1}+a_2x^2z^{n-2}+\ldots$, должно иметь двукратный корень $x=0$. Поэтому $a_0=0, a_1=0$ и $a_2\neq 0$. Кроме того, $b_1\neq 0$, так как иначе точка X была бы особой.

Вторая кривая задается уравнением

$$p_x\frac{\partial f}{\partial x}+p_z\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

т. е.

$$z^{n-2}(2ax+by)p_x+(n-1)z^{n-2}yp_z+\cdots=0.$$

Касательная в точке $X=(0:0:1)$ к этой кривой задается уравнением $(2ax+by)p_x+(n-1)yp_z=0$. Поскольку $a\neq 0$, эта прямая отлична от прямой $y=0$. Поэтому кривые $f=0$ и $g=0$ пересекаются в точке X трансверсально.

Тип (2). Пусть $X=(0:0:1)$ и касательные в точке X к ветвям кривой $f=0$ задаются уравнениями $x=0$ и $y=0$. Тогда $f(x,y,z)=z^{n-2}xy+\ldots$ Пусть $P=(p_x:p_y:p_z)$, где $p_xp_y\neq 0$. Тогда вторая кривая задается уравнением $z^{n-2}(p_xx+p_yy)+\ldots=0$. Касательная к этой кривой в точке X задается уравнением $p_xx+p_yy=0$. Это означает, что кривая $g=0$ пересекает обе ветви кривой $f=0$ в точке X трансверсально, поэтому кратность пересечения кривых равна 2.

Тип (3). Пусть $X=(0:0:1)$ и касательная в точке X к кривой $f=0$ задается уравнением $y=0$. Тогда $f(x,y,z)=z^{n-2}y^2+\ldots$ Пусть $P=(p_x:p_y:p_z)$, причем $p_y\neq 0$. Вторая кривая задается уравнением $2z^{n-2}yp_y+\cdots=0$. Касательная к этой кривой в точке X задается уравнением $y=0$ (рис. ??). Поэтому кратность пересечения кривых $f=0$ и $g=0$ в точке X равна 3. Формула $3n(n-2)=k^*+6\delta+8k$ доказывается аналогично, т. е. мы снова рассмотрим точки пересечения кривой $f=0$ с некоторой кривой $h=0$. Определение кривой $h=0$ тоже основано на разложении

$$f(X+tP)=f(X)+t\sum p_if_i(X)+\frac{t^2}{2}\sum p_ip_jf_{ij}(X)+\ldots$$

Но на этот раз нас будет интересовать не линейная, а квадратичная часть разложения, причем точка P будет не фиксированной, а переменной. Тогда выражение $p_ip_jf_{ij}(X)$ можно рассматривать как квадратичную форму от P. Эта квадратичная форма будет вырожденной тогда и только тогда, когда $\det(f_{ij}(X))=0$. Кривую $h=0$, где $h(X)=\det(f_{ij}(X))$, называют *гессианом кривой* $f=0$. Отметим, что кривая $h=0$ не зависит от выбора координат в $\mathbb{CP}^2$, хотя сама функция h зависит от выбора координат (при переходе к другой системе координат h умножается на квадрат определителя матрицы замены координат). Функция f_{ij} представляет собой однородный многочлен степени $n-2$, поэтому определитель матрицы размером 3×3, элементами которой являются функции f_{ij}, представляет собой однородный многочлен степени $3(n-2)$.

Количество точек пересечения кривых $f=0$ и $h=0$ с учетом их кратностей равно $3n(n-2)$. Проверим, что точками пересечения этих кривых являются в точности:

тип (1): точки перегиба кривой $f = 0$;

тип (2): точки самопересечения кривой $f = 0$;

тип (3): точки возврата кривой $f = 0$.

(Напомним, что по предположению у кривой $f = 0$ нет более сложных особых точек, чем точки самопересечения и точки возврата.)

Неособая точка X кривой $f = 0$ является точкой перегиба тогда и только тогда, когда касательная PX, заданная уравнением $\sum p_i f_i(X) = 0$, пересекает кривую $f = 0$ в точке X с кратностью 3. Это условие эквивалентно тому, что коника $\sum p_i p_j f_{ij}(X) = 0$ содержит прямую $\sum p_i f_i(X) = 0$. Рассматриваемая коника всегда касается рассматриваемой прямой, поэтому коника содержит прямую тогда и только тогда, когда коника вырожденная, т. е. $h(X) = 0$.

Если же точка X особая, то в случае, когда X — точка самопересечения, коника представляет собой пару прямых, касающихся ветвей кривой $f = 0$, а в случае, когда X — точка возврата, коника представляет собой пару слившихся касательных к кривой $f = 0$ в точке X. В обоих случаях $h(X) = 0$.

Точки пересечения кривой и ее гессиана можно описать следующим образом: точка X кривой $f = 0$ лежит на гессиане $h = 0$ тогда и только тогда, когда через точку X можно провести прямую, пересекающую кривую $f = 0$ в точке X с кратностью не менее 3. Если $X = (0, 0, 1)$ и прямая $y = 0$ пересекает кривую $f = 0$ в точке X с кратностью не менее 3, то

$$f = z^{n-1}ay + \frac{1}{2}z^{n-2}(2bxy + cy^2) + \ldots$$

Вычислим кратности точек пересечения кривых $f = 0$ и $h = 0$ в случаях (1)–(3). При этом мы будем учитывать лишь главную часть функции f в точке (0,0,1), т. е. наиболее высокие степени z.

Тип (1) — точка перегиба. В этом случае

$$f = z^{n-1}y + \frac{1}{2}z^{n-2}(2bxy + cy^2) + \frac{1}{6}z^{n-3}(dx^3 + \ldots),$$

причем $d \neq 0$, так как иначе кратность пересечения кривой $f = 0$ и прямой $y = 0$ была бы больше 3. Главная часть гессиана h равна

$$\begin{vmatrix} dz^{n-3}x & bz^{n-2} & b(n-2)z^{n-3}y \\ bz^{n-2} & cz^{n-2} & (n-1)z^{n-2} \\ b(n-2)z^{n-3}y & (n-1)z^{n-2} & (n-1)(n-2)z^{n-3}y \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1)z^{3n-7}(-d(n-1)x + b^2(n-2)y + \ldots).$$

Поэтому касательная к гессиану в точке (0,0,1) задается уравнением

$$-d(n-1)x + b^2(n-2)y = 0.$$

Эта касательная трансверсальна прямой $y = 0$, поэтому кратность пересечения кривых $f = 0$ и $h = 0$ в точке (0,0,1) равна 1.

Рис. 4.4: Многоугольник Ньютона

Тип (2) — точка самопересечения вида $xy = 0$. В этом случае $f = z^{n-2}xy + \dfrac{1}{6}z^{n-3}(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) + \ldots$, причем $a \neq 0$ и $d \neq 0$, так как иначе кратность пересечения кривой $f = 0$ с прямыми $x = 0$ и $y = 0$ в точке (0,0,1) была бы больше 3. Для нахождения ветвей кривой $f = 0$, проходящих через особую точку (0,0,1), удобно использовать многоугольник Ньютона. Он строится следующим образом: для каждого члена x^py^q многочлена f отмечаем точку с координатами (p, q), а затем берем выпуклую оболочку отмеченных точек. Ветви кривой соответствуют тем сторонам многоугольника Ньютона, продолжения которых отделяют многоугольник от начала координат. (Доказательство мы приведем на с. 66.) Для рассматриваемой кривой многоугольник Ньютона изображен на рис. 4.4. Стороны этого многоугольника соответствуют ветвям $yz + \dfrac{1}{6}ax^2 = 0$ и $xz + \dfrac{1}{6}dy^2 = 0$. Несложные вычисления показывают, что главная часть гессиана имеет вид

$$(n-1)\left[(n-2)z^{3n-8}xy - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{6}z^{3n-9}\left(nax^2 + 3(8-3n)bx^2y + 3(8-3n)cx^2y + ndy^3\right)\right].$$

Для гессиана многоугольник Ньютона тот же самый, поэтому ветви гессиана задаются уравнениями

$$(n-2)yz - \frac{1}{6}nax^2 = 0 \text{ и } (n-2)xz - \frac{1}{6}ndy^2 = 0.$$

Кривые $yz + \dfrac{1}{6}ax^2 = 0$ и $(n-2)yz - \frac{1}{6}nax^2 = 0$ не совпадают, поэтому кратность пересечения соответствующих ветвей кривых $f = 0$ и $h = 0$ в точке (0,0,1) равна 2. Кривые $f = 0$ и $h = 0$ в окрестности точки (0,0,1) изображены на рис. **??**. Каждая из двух ветвей гессиана пересекает одну ветвь исходной кривой трансверсально, а другую ветвь — с кратностью 2. Поэтому общая кратность пересечения кривых в этой точке равна 6.

Тип (3) — точка возврата вида $y^2 = x^3$. В этом случае

$$f = \frac{1}{2}z^{n-2}y^2 + \frac{1}{6}z^{n-3}(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) + \ldots$$

Главная часть гессиана имеет вид:

$$-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)z^{3n-9}y^2(ax+by).$$

Диаграмма Ньютона (рис.??) показывает, что интерес для нас представляет еще лишь коэффициент при $z^{3n-10}x^4$. Этот коэффициент равен $-\frac{1}{12}a^2(n-1)(n-3)$. Таким образом, через точку (0,0,1) проходят две ветви гессиана, задаваемые уравнениями $ax+by=0$ и $(n-2)y^2+\frac{1}{6}(n-3)ax^3=0$ (рис. ??). Так как $a \neq 0$, прямая $ax+by=0$ пересекает кривую $f=0$ двукратно. Проверим, что кратность пересечения другой ветви гессиана с кривой $f=0$ равна 6, т. е. общая кратность пересечения кривой и гессиана в точке возврата равна 8.

Результант многочленов $f(y)=y^3+ax^2$ и $g(y)=y^3+bx^2$ равен

$$\det\begin{pmatrix} I & ax^2I \\ I & bx^2I \end{pmatrix} = \det(bx^2I - ax^2I) = (b-a)^3x^6$$

(здесь I — единичная матрица размером 3×3). В однородных координатах результант равен $(b-a)^3x^6z^3$. Поэтому кривые $y^3+ax^2z=0$ и $y^3+bx^2z=0$ при $a\neq b$ пересекаются 6-кратно в точке (0,0,1) и 3-кратно в точке (1,0,0).

В итоге получаем $3n(n-2) = k^* + 6\delta + 8k$, где k^* — количество точек возврата двойственной кривой, т. е. количество точек перегиба исходной кривой, δ — количество точек самопересечения, k — количество точек возврата. Для двойственной кривой получаем $3n^*(n^*-2) = k+6\delta^*+8k^*$. Доказательство соотношений Плюккера завершено.

Вот одно из из приложений. Для неособой кривой $\delta=0$ и $k=0$, поэтому

$$k^* = 3n(n-2), \qquad \delta^* = \frac{n(n-3)(n^2+n-6)}{2}.$$

Напомним, что k^* — количество точек перегиба кривой C, а δ^* — количество двойных касательных кривой C. В частности, неособая кривая степени 3 имеет ровно 9 точек перегиба и не имеет двойных касательных, а неособая кривая степени 4 имеет ровно 24 точки перегиба и ровно 28 двойных касательных.

4.4 Многоугольники Ньютона

Пусть плоская кривая, заданная однородным уравнением $P(x,y,z)=0$, неприводима. Это означает, что многочлен P не раскладывается в произведение двух полиномиальных множителей, степень каждого из которых положительна. Однако может так случиться, что в окрестности выбранной точки (мы будем считать, что эта точка имеет однородные координаты $(0:0:1)$) уравнение кривой все-таки раскладывается на нетривиальные множители. В этом случае мы будем говорить, что каждый из этих множителей задает *локальную ветвь* кривой.

Определение 4.4.1. Пусть $p(x, y) = 0$ — уравнение кривой $P(x, y, z) = 0$ в окрестности точки $(0, 0)$, $p(x, y) = P(x, y, 1)$. Мы говорим, что кривая *локально неприводима* в окрестности точки $(0, 0)$, если функцию $p(x, y)$ нельзя разложить в произведение двух аналитических функций $p(x, y) = p_1(x, y)p_2(x, y)$, обращающихся в нуль в точке $(0, 0)$. Если функция p допускает разложение на локально неприводимые сомножители

$$p(x, y) = p_1(x, y) \dots p_d(x, y),$$

то кривые, локально заданные уравнениями $p_i(x, y) = 0$, $i = 1, \dots, d$, называются *локальными ветвями кривой в точке.*

Отметим, что, поскольку многочлен $p(x, y) = P(x, y, 1)$ неприводим, сомножители в его разложении на локально неприводимые множители не могут быть полиномиальными — в аффинных координатах x, y они задаются бесконечными рядами.

Упражнение 4.4.2. Докажите следующие свойства локальных ветвей: а) в гладкой точке кривая локально неприводима, т.е. кривая может быть локально приводимой только в особой точке; б) в особой точке кривая не обязательно локально приводима; например, начало координат в полукубической параболе $x^2 = y^3$ является ее локально неприводимой точкой; в) всякая локальная ветвь кривой допускает аналитическую параметризацию, т.е. для всякой неприводимой в начале координат аналитической кривой $p_i(x, y) = 0$ существуют ненулевые аналитические функции $f_1(t), f_2(t)$, $f_1(0) = f_2(0) = 0$, такие, что в некоторой окрестности начала координат $p_i(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $p(f_1(t), f_2(t)) = 0$.

Объясним теперь более подробно, как с помощью диаграммы (многоугольника) Ньютона находить ветви кривой, проходящие через особую точку (0,0). Рассмотрим кривую $\sum a_i x^{m_i} y^{n_i} = 0$. Ветви этой кривой, проходящие через точку (0,0), задаются уравнениями вида $y = x^\alpha \varphi(x)$, где $\varphi(x) \to a \neq 0$ при $x \to 0$. Подставив такое выражение в уравнение кривой, получим

$$\sum a_i x^{m_i + \alpha n_i} \varphi_i(x) = 0. \tag{4.3}$$

Предположим, что одно из чисел $m_k + \alpha n_k$ меньше остальных. Сократив (6.4) на $x^{m_k + \alpha n_k}$, получим $a_k \psi_1(x) + \psi_2(x) = 0$, причем $\lim\limits_{x \to 0} \psi_1(x) {\neq} 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} \psi_2(x) = 0$. Приходим к противоречию, поэтому при данном α по крайней мере два числа $m_i + \alpha n_i$ и $m_j + \alpha n_j$ должны совпадать и быть меньше всех остальных чисел такого вида. Если минимальным является число $m_i + \alpha n_i = m_j + \alpha n_j = \dots = m_s + \alpha n_s$, то соответствующая ветвь задается (приближенно) уравнением

$$a_i x^{m_i} y^{n_i} + a_j x^{m_j} y^{n_j} + \dots + a_s x^{m_s} y^{n_s} = 0;$$

количество слагаемых в этом уравнении равно количеству отмеченных точек, лежащих на соответствующей стороне многоугольника Ньютона. Геометрический смысл того, что число $m_i + \alpha n_i = \dots = m_s + \alpha n_s$ минимально, достаточно прост. При данном α уравнения $m + \alpha n = k$ при различных k задают семейство параллельных прямых на плоскости с координатами (m, n), причем величина k минимальна для прямой, которая расположена ближе всего к началу координат. Это означает, что ветвям кривой $f = 0$ соответствуют лишь те прямые, которые содержат стороны многоугольника Ньютона, причем многоугольник и начало координат должны лежать по разные стороны от этих прямых.

Упражнение 4.4.3. С помощью диаграммы Ньютона найти ветви следующих кривых в точке (0,0):

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;
б) $(x + y)(x^2 + y^2) + x(x - y) = 0$;
в) $y^2 + x^2(x - y) = 0$.