Листок № 5. Задачи повышенной трудности. Для успешной сдачи листка необходимо решить не менее 4-х любых задач.
Напоминание:

Предположим, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ существует симметричная с.в. ε, имеющая распределение Бернулли (т.е. $P(\varepsilon = +1) = P(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$) и с.в. X, которые независимы. Тогда εX и ε независимы тогда и только тогда, когда X симметрична (т.е. $X \ =^{law} -X$).

1. Построить на подходящем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ две независимые σ - алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и случайную величину Y такую, что
(i) Y является $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ измеримой
(ii) Y не зависит от $\mathcal{B}$
(iii) Y не измерима относительно $\mathcal{A}$.
2. Построить на подходящем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ две независимые σ - алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и не постоянную с.в. Z такую, что
(j) Z не зависит от $\mathcal{A}$
(jj) Z не зависит от $\mathcal{B}$
(jjj) Z является $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ измеримой.
3. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ вероятностное пространство и $\mathcal{G} - \sigma$ - подалгебра $\mathcal{F}$. Пусть $\Gamma \in \mathcal{F}$. Доказать, что следующие свойства эквивалентны:
(i) Γ не зависит от $\mathcal{G}$ по мере P.
(ii) Для каждой вероятностной меры Q на $(\Omega, \mathcal{F})$, эквивалентной мере P и с плотностью $\frac{dQ}{dP}$ измеримой относительно $\mathcal{G}$, имеем:
$$Q(\Gamma) = \mathrm{P}(\Gamma).$$
4. Пусть Q – вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, которая эквивалентна P. Рассмотрим следующие свойства:
(j) $\frac{dQ}{dP}$ измерима относительно $\mathcal{G}$
(jj) для каждого множества $\Gamma \in \mathcal{F}$ независимого от $\mathcal{G}$ по мере P, имеем
$$Q(\Gamma) = \mathrm{P}(\Gamma).$$
Доказать, что (j) влечёт (jj).
5. Пусть (X_n) - последовательность независимых гауссовских с.в. со средними μ_n и дисперсиями σ_n^2.
a) Доказать, что $\sum_n X_n^2$ сходится в L^1 тогда и только тогда, когда
$$\sum_n (\mu_n^2 + \sigma_n^2) < \infty. \qquad (1)$$
b) Доказать, что если (1) выполнено, то $\sum_n X_n^2$ сходится в $L^p, p \in [1, \infty)$
c) Предположим, что $\mu_n = 0$ для каждого n. Доказать, что если $\sum_n \sigma_n^2 = \infty$, то $P(\sum_n X_n^2 = \infty) = 1$.
6. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и σ - подалгебру $\mathcal{G}$. Предположим, что существуют две случайные величины X и Y, X является $\mathcal{F}$ измеримой, а Y - $\mathcal{G}$ измеримой, такие, что для каждой

ограниченной борелевской функции $g: R \to R_+$ имеет место равенство P почти наверное

$$E(g(X)|\mathcal{G}) = g(Y).$$

Доказать, что тогда $X = Y$ P почти наверное.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и семейство H случайных величин со значениями в R_+, которые ограничены в L^1, то есть

$$sup_{X \in H} EX < \infty.$$

Семейство H называется равномерно интегрируемым, если

$$\sup_{X \in H} \int\limits_{(X > a)} X dP \xrightarrow[a \to \infty]{} 0.$$

Определим меры $\nu_X(A) = \int_A XdP,\ A \in \mathcal{F}.$ Известно, что свойство равномерной интегрируемости семейства случайных величин $X \in H$ эквивалентно свойству равномерной абсолютной непрерывности семейства мер $\nu_X, X \in H$, относительно меры P:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{F}, P(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{X \in H} \nu_X(A) \leq \varepsilon.$$

7. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство и $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), X \geq 0$, для некоторого $p \geq 1$. Пусть $\mathbb{H}$ - множество всех σ- подалгебр $\mathcal{F}$. Доказать, что семейство случайных величин

$$\{(E[X|\mathcal{G}]^p): \mathcal{G} \in \mathbb{H}\}$$

равномерно интегрируемо.