8.1. Не используя интегральный признак, исследуйте следующие ряды на сходимость:
1) $\sum\limits_n \frac{1}{n}$; **2)** $\sum\limits_n \frac{1}{n^{1+\delta}}$ $(\delta > 0)$; **3)** $\sum\limits_n \frac{1}{n \ln n}$.

8.2. Придумайте такую последовательность $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots \to 0$, что ряд $\sum\limits_n \frac{1}{n^{1+\alpha_n}}$
1) сходится; **2)** расходится.

8.3. Исследуйте следующие ряды на сходимость:
1) $\sum\limits_n \frac{1}{n \ln^p n}$; **2)** $\sum\limits_n \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; **3)** $\sum\limits_n \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$; **4)** $\sum\limits_n \frac{x^n n!}{n^n}$ $(x \geqslant 0)$;
5) $\sum\limits_n \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$; **6)** $\sum\limits_n \frac{\ln^2 n}{n} \sin\frac{\pi n}{4}$; **7)** $\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

8.4. Пусть
$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если в десятичной записи } n \text{ нет } 7,\\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$
Сходится ли ряд $\sum\limits_n \frac{\chi(n)}{n}$?

8.5. Пусть (a_n) — последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Докажите, что ряд $\sum_n a_n$ сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_n 2^n a_{2^n}$ сходится.

Определение 8.1. Пусть $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ — семейство действительных чисел. Предположим, что для некоторой биекции $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ряд $\sum_n a_{\varphi(n)}$ абсолютно сходится. Из теоремы о перестановке членов ряда (см. лекцию) следует, что тогда ряд $\sum_n a_{\psi(n)}$ сходится для любой биекции $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, причем его сумма A не зависит от выбора этой биекции. В такой ситуации говорят, что *двойной ряд* $\sum_{i,j=1}^\infty a_{ij}$ *абсолютно сходится*, и число A называют его суммой.

8.6. Пусть ряды $\sum_{i=1}^\infty a_i$ и $\sum_{j=1}^\infty b_j$ абсолютно сходятся. Докажите, что двойной ряд $\sum_{i,j=1}^\infty a_i b_j$ абсолютно сходится, и что его сумма равна $\bigl(\sum_{i=1}^\infty a_i\bigr)\bigl(\sum_{j=1}^\infty b_j\bigr)$.

8.7. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, и ряд $\sum_n a_n$ сходится. Следует ли отсюда сходимость ряда $\sum_n b_n$?

8.8 (*Преобразование Абеля*[1]). Докажите, что для любых чисел $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ выполнено равенство $\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1}-a_k)$, где $B_k = \sum\limits_{j=1}^k b_j$.

8.9 (*Признак Абеля–Дирихле*). Пусть (a_n) и (b_n) — числовые последовательности. Предположим, что выполнено любое из следующих двух условий:
1) последовательность (a_n) монотонна и стремится к нулю, и частичные суммы ряда $\sum_n b_n$ ограничены;
2) последовательность (a_n) монотонна и ограничена, и ряд $\sum_n b_n$ сходится.

Докажите, что ряд $\sum_n a_n b_n$ сходится.

8.10. 1) Сходится ли ряд $\sum\limits_n \frac{\cos n}{n}$? **2)** Сходится ли он абсолютно?

8.11. Исследуйте ряд $\sum\limits_n \frac{\sin(\pi n/4)}{n^p + \sin(\pi n/4)}$ на абсолютную и условную сходимость для всевозможных $p \in \mathbb{R}$.

8.12**. Докажите расходимость ряда $\sum\limits_{p \text{ простое}} \frac{1}{p}$.

[1] Преобразование Абеля можно рассматривать как дискретный аналог формулы интегрирования по частям.