

Листок 9 Алгебра 2 2 Модуль

Группы предполагаются конечными, представления комплексными. Эрмитово произведение на пространстве комплекснозначных функций на группе задается формулой

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}.$$

1. Докажите, что комплексное представление конечной группы унитаризуемо, то есть существует положительно определенная эрмитова форма H , сохраняемая действием группы: $H(\rho(v)) = H(v)$.

2. Выведите из задачи 1 теорему Машке для поля \mathbb{C} .

Функция называется центральной если она принимает одинаковые значения на сопряженных элементах.

3. Пусть V_1 и V_2 – неизоморфные неприводимые представления конечной группы G ; а h – произвольное линейное отображение V_1 в V_2 . Докажите что усреднение h равно нулю.

4. Пусть V – неприводимое представление конечной группы G степени n ; h – произвольное линейное отображение V в себя. Докажите что усреднение h действует умножением на $\text{Tr}(h)/n$.

5. Вычислите матричные элементы усредненных линейных отображений из задач 3. 4.

6. Для унитарного представлений выведите соотношения ортогональности для матричных элементов представлений в унитарных базисах.

7. Докажите ортогональность характеров различных неприводимых представлений.

8. Найдите эрмитову длину характера неприводимого представления как функции на группе.