Домашние задачи

Номер варианта k — последняя цифра номера студенческого билета. Пусть

$$\begin{aligned}
F_0 &= x + y - z + \pi x^9 + \pi^2 yz \\
F_1 &= \sin(x)\cos(y)\cos(z) \\
F_2 &= e^{xy}\ln(z+1) \\
F_3 &= x - y + z + \pi y^3 - \pi^2 xz \\
F_4 &= \cos(x)\sin(y)\cos(z) \\
F_5 &= e^{-xz}\ln(y+1) \\
F_6 &= y + z - x + \pi z^8 + \pi^2 xy \\
F_7 &= \cos(x)\cos(y)\sin(z) \\
F_8 &= e^{yz}\ln(1-x) \\
F_9 &= x + y + z + \pi^2 xyz
\end{aligned}$$

Задача 1. (срок сдачи 16.11)

Найдите касательное пространство в начале координат

a) многообразия в $\mathbb{R}^5$, заданного отображением $U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ посредством

$$F = (F_{(k+1) \mod 10}, F_{(k+2) \mod 10}, \ldots, F_{(k+5) \mod 10});$$

b) многообразия в $\mathbb{R}^3$, заданного уравнением $F_k = 0$;

c) образа многообразия из пункта b) при отображении F.

Задача 2. (срок сдачи 23.11.2011)

a+b) Возьмите функции из набора 1-8, номера которых сравнимы с номером студенческого билета по модулю 4 (всего два примера). Найдите точки нулевого градиента, для каждой из них вычислите второй дифференциал функции Лагранжа и сигнатуру его ограничения на касательное пространство. Исходя из этого, укажите, какие из них являются минимумом или максимумом.

NN	функция	условие
1	x	$x^3 + y^3 - 3xy = 3$
2	y	$x^3 + y^3 - 3xy = 0,\ (x, y) \neq (0, 0)$
3	xy	$x^3 + y^3 - 3xy = 0,\ (x, y) \neq (0, 0)$
4	$x^2 + 2y^2$	$x^3 + y^3 = 1$
5	$x^5 + y^5 + z^5$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
6	$x^2 + y^2 + z^2$	$x^5 + y^5 + z^5 = 1$
7	$x^4 + y^4 + z^4$	$x^3 + y^3 + z^3 = 1$
8	xyz	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

c) Пусть $A = (a_{ij})$ — вещественная матрица порядка $n \times n$. Найдите точки нулевого градиента $\det(A)$ при условиях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i$.

Подсказка: вспомните формулу для обратной матрицы.

d) Выясните, являются ли определитель полученных в пунтке c) матриц минимальным или максимальным, и докажите *неравенство Адамара*

$$(\det(A))^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right).$$

Пусть

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= (ax^3+bx^2y)dx+(cx^3+dx^2y)dy\\
\omega_1 &= (ax^2y+bxy^2)dx+(cx^3+dx^2y)dy\\
\omega_2 &= (ax^2y+bxy^2)dx+(cx^2y+dxy^2)dy\\
\omega_3 &= (axy^2+by^3)dx+(cx^2y+dxy^2)dy\\
\omega_4 &= (axy^2+by^3)dx+(cxy^2+dy^3)dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x,y) &= (\sin(xy),\cos(x)\sin(y))\\
\phi_1(x,y) &= (xe^y,ye^x)\\
\phi_2(x,y) &= (x\sin(y),y\cos(x))\\
\phi_3(x,y) &= (xy,e^x+e^y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 4(x+y)^2+y^2-4\\
F_1 &= (x-y)^2+y^2-1\\
F_2 &= 4x^2+(x+y)^2-4
\end{aligned}
$$

Задача 3. (срок сдачи 30.11) Пусть числа k,l,s — номер студенческого билета по модулю 5,4 и 3 соответственно.

a) Вычислите $\phi_l^*(\omega_k)$.

b) Вычислите интеграл ω_k по эллипсу $\mathcal{E}$, заданному уравнением $F_s=0$.

c) При каких значениях a,b,c,d форма ω_k является дифференциалом функции $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$? Найдите эту функцию.

d) При каких значениях a,b,c,d ограничение формы ω_k на эллипс $\mathcal{E}$ является дифференциалом функции $\mathcal{E}\to\mathbb{R}$?

e) Докажите, что для всякой гладкой кривой C и функций $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ выполнено $\left|\int_C(Pdx+Qdy)\right|\leqslant LM$, где L — длина кривой C, а $M=\sup_C\sqrt{P^2+Q^2}$.

Пусть

$$
\begin{array}{lll}
\omega_0 = xdx \wedge dy & \omega_1 = ydx \wedge dy & \omega_2 = zdx \wedge dy \\
\omega_3 = xdy \wedge dz & \omega_4 = ydy \wedge dz & \omega_5 = zdy \wedge dz \\
\omega_6 = xdx \wedge dz & \omega_7 = ydx \wedge dz & \omega_8 = zdx \wedge dz
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
v_0 & = & y^z\partial/\partial x + z^x\partial/\partial y + x^y\partial/\partial z \\
v_1 & = & z^y\partial/\partial x + x^z\partial/\partial y + y^x\partial/\partial z \\
v_2 & = & x^z\partial/\partial x + y^x\partial/\partial y + z^y\partial/\partial z \\
v_3 & = & x^y\partial/\partial x + y^z\partial/\partial y + z^x\partial/\partial z \\
v_4 & = & y^x\partial/\partial x + z^y\partial/\partial y + x^z\partial/\partial z
\end{array}
$$

Поверхность S_0 — *геликоид*

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = \phi, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi.$$

Поверхность S_1 — *тор*

$$x = (2+\cos\psi)\cos\phi,\ y = (2+\cos\psi)\sin\phi,\ z = \sin\psi, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi.$$

Задача 4. (срок сдачи 7.12) Пусть k, l, m — остаток при делении номера студенческого билета на 9, 5 и 2 соответственно.

a) Вычислите производную Ли 2-формы ω_k относительно векторного поля v_l.

b) Найдите интеграл 2-формы ω_k по поверхности S_m.

c) Вычислите площадь поверхности S_m.

d) Докажите, что площадь n-мерной сферы радиуса R равна значению производной объёма шара радиуса r по переменной r в $r = R$.