Дифференциальные формы

Задача 1. a) Выразите площадь фигуры на плоскости, ограниченной замкнутой несамопересекающейся гладкой кривой C, с помощью интеграла 1-формы на плоскости по C.

b) Чему будет равен этот интеграл для самопересекающейся кривой?

Задача 2. Докажите, что функция $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ с заданными гладкими частными производными $f_i=\partial F/\partial x_i$ найдётся тогда и только тогда, когда $\partial f_i/\partial x_j=\partial f_j/\partial x_i$ для всех $1\leqslant i<j\leqslant n$.

Задача 3. Докажите, что ограничение формы

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k dx_1\wedge dx_2\wedge\dots\wedge dx_{k-1}\wedge dx_{k+1}\wedge dx_{k+2}\dots\wedge dx_n$$

на единичную сферу в $\mathbb{R}^n$ совпадает с формой объёма.

Задача 4. Пусть v — векторное поле на многообразии M, ϕ_t — соответствующий поток диффеоморфизмов M. Для векторного поля u определим *производную Ли* $L_v u=\frac{d}{dt}\left((d\phi_t)\,u\right)\big|_{t=0}$.

a) Запишите $L_v u$ в координатах и докажите, что $L_v u=-L_u v$ (по этой причине также $L_u v$ называется *коммутатором* векторных полей u с v и обозначается $[u,v]$).

b) Пусть ω — 1-форма на M. Докажите, что $\omega(L_v u)+(L_v\omega)(u)=L_v(\omega(u))$.

c) Докажите, что для k-формы ω и векторных полей $v_0,\dots,v_k$ на M выполняется

$$\begin{aligned} d\omega(v_0,\dots,v_k) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i L_{v_i}\omega(v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k)\\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(L_{v_i}v_j,v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_{j-1},v_{j+1},\dots,v_k).\end{aligned}$$

d^*) Для векторных полей u, v, w докажите *тождество Якоби* $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$.

Задача 5. Пусть $Vect(M)$ — векторное пространство бесконечно гладких векторных полей на M. Для $M=\mathbb{R}^n$ определим *дивергенцию* векторного поля $\operatorname{div}(\sum f_i\partial/\partial x_i)=\sum\partial f_i/\partial x_i$

a) Докажите, что следующая последовательность является точной:

$$C^\infty(\mathbb{R}^2)\xrightarrow{\text{grad}}Vect(\mathbb{R}^2)\xrightarrow{\text{div}}C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Подсказка: отождествите $Vect(\mathbb{R}^2)$ с пространством 1-форм, второе $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ с пространством 2-форм, отображения — с дифференциалом d.

b) Определим отображение $\operatorname{rot}:Vect(\mathbb{R}^3)\to Vect(\mathbb{R}^3)$, переводящее $\sum f_i\partial/\partial x_i$ в определитель

$$\begin{pmatrix}\partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3\\ f_1 & f_2 & f_3\\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3\end{pmatrix}$$

Докажите, что следующая последовательность является точной:

$$C^\infty(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{\text{grad}}Vect(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{\text{rot}}Vect(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{\text{div}}C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Подсказка: действуйте аналогично.

c) Пусть S — гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, ограничивающая фигуру $D\subset\mathbb{R}^3$, пусть dS — форма объёма на S, n — вектор нормали. Докажите, что для всякого $v\in Vect(\mathbb{R}^3)$ выполняется

$$\int_S(v,n)dS=\int_D\operatorname{div}(v)dx\wedge dy\wedge dz.$$

Подсказка: используйте отождествления $Vect(\mathbb{R}^3)$ с 1- и 2-формами и теорему Стокса.

d) Что будет 2-мерным аналогом предыдущего пункта?

e^*) Пусть S — гладкая поверхность с краем в $\mathbb{R}^3$, гладкая кривая C — её край, dS и dl —форма объёма на S и C соответственно, n — вектор нормали к C в касательном пространстве к S. Выразите $\int_S(\operatorname{rot}(v),n)dS$ интегралом 1-формы по кривой C.

Задача 6*. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ — две непересекающиеся замкнутые кривые. Определим отображение $\Gamma : S^1 \times S^1 \to S^2$ посредством $\Gamma(t_1, t_2) = \frac{\gamma_1(t_1)-\gamma_2(t_2)}{|\gamma_1(t_1)-\gamma_2(t_2)|}$. За dS обозначим форму объёма на S^2.

a^*) Докажите, что $\int\limits_{S_1 \times S_1} \Gamma^* dS$ является гомотопическим инвариантом пары непересекающихся кривых.

b^*) Опишите этот инвариант в топологических терминах.

Задача 7*. Пусть M — бесконечно гладкое многообразие, $M^k = M \times \cdots \times M$ (всего k сомножителей), $\Delta \subset M^k$ — диагональ, состоящая из точек $(x, x, \ldots, x)$. Пусть $C^{\wedge k}$ — пространство кососимметрических функциий на M^k (для которых $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \mathrm{Sign}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_k)$).

a^*) Докажите, что всякая функция из $C^{\wedge k}$ имеет ноль кратности по крайней мере $k(k-1)/2$ на Δ.

b^*) Установите изоморфизм факторпространства $C^{\wedge k}$ по подпространству функций с нулём кратности большей $k(k-1)/2$ на Δ с пространством $(k-1)$-форм на M так, чтобы отображение

$$df(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \mathrm{Sign}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

задавало дифференциал.