Глава 6

Дифференциальные 1-формы на кривых

Основные свойства кривых и, более общим образом, произвольных комплексных многообразий удобно выражать в терминах различных связанных с ними объектов. В первую очередь, речь идет о пространствах мероморфных функций, векторных полей и дифференциальных форм. Эти пространства наделены естественными алгебраическими структурами, что позволяет выражать свойства кривых в алгебраических терминах.

6.1 Касательное и кокасательное расслоения

Риманова поверхность представляет собой одномерное комплексное многообразие. Над каждым — вещественным ли, комплексным ли — многообразием есть естественные векторные расслоения. Для определенности мы будем говорить ниже о комплексных многообразиях, которые нас в первую очередь и интересуют. Прежде всего мы можем рассмотреть расслоение прямого произведения $M \times \mathbb{C}$, где M — наше многообразие. Проектирующее отображение расслоения — это проекция на первый сомножитель. Разумеется, можно рассматривать произведение многообразия и на векторное пространство большей размерности, однако эта конструкция нам пока не понадобится.

Еще два естественных векторных расслоения, которые имеются над любым многообразием — это касательное и кокасательное расслоение. Напомним их определения.

Касательный вектор в точке t многообразия M можно определить следующими способами. Во-первых, его можно считать классом эквивалентности голоморфных отображений $D \to M$ единичного диска D в M, переводящих 0 в t. При этом два отображения γ_1, γ_2 считаются эквивалентными, если расстояние $\rho(\gamma_1(x), \gamma_2(x))$ стремится к нулю быстрее, чем x, при $x \to 0$;

это означает, что

$$\lim_{x\to 0} \rho(\gamma_1(x), \gamma_2(x))/|x| = 0.$$

Метрика ρ в этом определении может быть произвольной.

Другое определение более алгебраично, однако с ним легче работать. Согласно ему касательным вектором в точке t называется дифференцирование из кольца ростков в точке t в кольцо комплексных чисел. *Дифференцирование* — это линейное отображение колец, удовлетворяющее *правилу Лейбница*

$$\delta(fg) = \delta(f)g(t) + f(t)\delta(g).$$

Из этого определения очевидно, например, что все касательные векторы в точке образуют векторное пространство. Размерность этого векторного пространства совпадает с размерностью многообразия. В частности, касательное пространство к кривой одномерно.

Двойственное к касательному векторному пространству называется *кокасательным.* Оно состоит из линейных функционалов на касательном пространстве, называемых *кокасательными векторами.*

В произвольной локальной координате z на кривой касательный вектор записывается в виде $a\frac{d}{dz}$. В произвольных локальных координатах $z_1, \dots, z_n$ на многообразии размерности n — в виде $a_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + a_n\frac{\partial}{\partial z_n}$. Соответственно, кокасательный вектор имеет координатное представление bdz или, в общем случае, $b_1dz_1 + \dots + b_ndz_n$. Кокасательный вектор bdz действует на касательный вектор $a\frac{d}{dz}$ по правилу

$$bdz : a\frac{d}{dz} \mapsto ab.$$

Совокупность касательных (соотв., кокасательных) пространств во всех точках многообразия является *касательным* (соотв., *кокасательным*) расслоением над многообразием.

Определение 6.1.1. *Линейным расслоением* над многообразием называется векторное расслоение ранга один, т.е. расслоение, слой которого одномерен.

Касательное и кокасательное расслоение над комплексной кривой линейны, поскольку их слои одномерны.

Векторное поле — это совокупность касательных векторов в каждой точке многообразия. При этом вектор должен зависеть от точки многообразия голоморфно. Другими словами, векторное поле — это *голоморфное сечение* касательного расслоения. Соответственно, голоморфное сечение кокасательного расслоения называется *голоморфной дифференциальной 1-формой*. Аналогично голоморфная функция на многообразии — это голоморфное сечение тривиального линейного расслоения, т.е. прямого произведения $M \times \mathbb{C}$, рассматриваемого как расслоение над M.

В локальной координате голоморфное векторное поле и голоморфная 1-форма имеют соответственно вид

$$a(z)\frac{d}{dz} \qquad \text{и} \qquad b(z)dz,$$

где a, b — голоморфные функции.

Заметим, что координатные представления векторного поля и 1-формы по-разному ведут себя при замене координаты. Пусть мы выполнили замену координаты $z = g(z_1)$. Тогда в новой координате 1-форма имеет вид

$$a(z)dz = a(g(z_1))dg(z_1) = a(g(z_1))g'(z_1)dz_1.$$

Выписать преобразование векторного поля сложнее. Для этого посмотрим, как наше поле действует на функцию z_1:

$$a(z)\frac{dz_1}{dz} = a(z)\frac{dg^{-1}(z)}{dz} = \frac{a(g(z_1))}{g'(z_1)}.$$

Поэтому замена координаты следующим образом отражается на векторном поле:

$$a(z)\frac{d}{dz} = \frac{a(g(z_1))}{g'(z_1)}\frac{d}{dz_1}.$$

Каждая голоморфная функция, записанная в произвольной координате z в окрестности данной точки $z = 0$, представляется в виде степенного ряда по положительным степеням переменной z:

$$a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots .$$

Однако голоморфные векторные поля и дифференциальные формы, также как и голоморфные функции, на компактных комплексных кривых чрезвычайно редки. Поэтому наряду с ними мы будем рассматривать и мероморфные векторные поля и функции, т.е. мероморфные сечения касательного и кокасательного расслоений. У каждой точки такого сечения, за исключением конечного числа, есть окрестность, в любой локальной координате z на которой коэффициент при d/dz (соотв., при dz) записывается в виде голоморфной функции. В отдельных же точках такому коэффициенту разрешается иметь полюса. Порядок полюса коэффициента называется ***порядком полюса*** мероморфного векторного поля и мероморфной функции. Он не зависит от выбора локальной координаты на кривой.

Всякая мероморфная функция, записанная в произвольной координате z в проколотой окрестности своего полюса $z = 0$ порядка $k > 0$, представляется в виде степенного ряда по степеням переменной z порядка $-k$ и выше:

$$a(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots .$$

Все мероморфные функции на данной кривой образуют поле — их можно складывать, умножать и делить друг на друга. Каждое из $\mathbb{C}$-пространств мероморфных векторных полей и мероморфных 1-форм является векторным пространством и над полем мероморфных функций на кривой.

Упражнение 6.1.2. Докажите, что при подходящем выборе локальной координаты z в окрестности своего полюса $z = 0$ порядка $k > 0$ мероморфная функция представляется в виде $a(z) = z^{-k}$.

Упражнение 6.1.3. Верно ли, что при подходящем выборе локальной координаты z в окрестности полюса $z = 0$ порядка $k > 0$ данную мероморфную 1-форму можно привести к виду $z^{-k}dz$?

Мероморфная функция — это мероморфное сечение тривиального линейного расслоения. Мероморфное векторное поле можно также определить, как дифференцирование из кольца мероморфных функций в себя.

6.2 Как задавать векторные поля и дифференциальные формы

Рассмотрим сначала случай рациональной кривой. В произвольной координате z на $\mathbb{CP}^1$ мероморфная дифференциальная форма записывается в виде $a(z)dz$, где a — некоторая мероморфная (т.е. рациональная) функция. Замена координат $z = 1/z_1$ показывает, что и в самом деле в точке $z = \infty$ коэффициент при dz_1 является мероморфной функцией. Аналогично любое мероморфное векторное поле записывается в виде $a(z)d/dz$. Посмотрим, как выглядят голоморфные дифференциальные 1-формы и векторные поля.

Рассмотрим дифференциальную 1-форму dz на $\mathbb{CP}^1$. Подстановка $z = 1/z_1$ показывает, что у такой 1-формы имеется полюс порядка 2 в точке $z = \infty$:

$$dz = -\frac{1}{z_1^2}dz_1.$$

Но это означает, что и у любой ненулевой мероморфной 1-формы есть полюса! Действительно, пусть ω — произвольная мероморфная 1-форма. Частное ω/dz — ненулевая мероморфная функция; обозначим эту функцию через f. Тогда $\omega = fdz$, и у 1-формы есть полюса во всех тех точках, где они есть у f. Если же у f нет полюсов в точках, отличных от $z = \infty$, то у ω обязательно есть полюс в $z = \infty$. Тем самым мы доказали, что на рациональной кривой нет ненулевых голоморфных 1-форм или, другими словами, что размерность пространства голоморфных 1-форм на $\mathbb{CP}^1$ равна нулю.

Упражнение 6.2.1. Подсчитайте размерность пространства голоморфных векторных полей на $\mathbb{CP}^1$.

Утверждение о том, что у ненулевой мероморфной 1-формы на $\mathbb{CP}^1$ есть полюса, можно уточнить. А именно, рассмотрим порядки всех нулей и всех полюсов произвольной мероморфной 1-формы ω. Тогда разность между суммой порядков всех нулей и суммой порядков всех полюсов равна -2. Действительно, для формы dz это так, а умножение этой формы на ненулевую мероморфную функцию увеличивает сумму порядков нулей на столько же, насколько и сумму порядков полюсов.

Упражнение 6.2.2. Чему равна разность суммы порядков нулей и суммы порядков полюсов мероморфного векторного поля на $\mathbb{CP}^1$?

Мы увидим впоследствии, что работать с дифференциальными формами гораздо легче, чем с векторными полями; поэтому разговор будет идти в первую очередь об 1-формах на кривых.

С каждой мероморфной функцией на кривой C можно связать мероморфную 1-форму на ней. А именно, мы можем сопоставить функции f ее дифференциал df. Например, 1-форма dz является дифференциалом мероморфной функции z.

Упражнение 6.2.3. Проверьте, что мероморфная 1-форма dz/z не является дифференциалом никакой мероморфной функции.

Тем самым, у нас имеется линейное отображение из пространства мероморфных функций в пространство мероморфных 1-форм. Элементы образа этого отображения называются *точными* дифференциальными 1-формами. Как показывает предыдущее упражнение, не всякая мероморфная 1-форма на кривой точна.

Упражнение 6.2.4. Сформулируйте простое необходимое и достаточное условие того, чтобы мероморфная 1-форма на $\mathbb{CP}^1$ была точна.

Дифференциальные формы — аналогично функциям, но в отличие от векторных полей — преобразуются при отображении многообразий в направлении, обратном действию отображения. Это позволяет задавать их теми же способами, что мы использовали для задания функций.

Если наша кривая C вложена в проективное пространство, то мероморфную 1-форму на ней можно задать путем ограничения мероморфной 1-формы на объемлющем пространстве. Действительно, касательная прямая к кривой в точке естественно вложена в касательное пространство к объемлющему пространству в той же точке. Дифференциальная 1-форма представляет собой семейство линейных функционалов на касательных пространствах в каждой точке объемлющего пространства. Ограничивая ее на касательную прямую к кривой, мы получаем семейство линейных функционалов на касательных прямых к кривой, т.е. дифференциальную 1-форму на ней.

Упражнение 6.2.5. Ограничение векторного поля на объемлющем проективном пространстве на кривую, вложенную в это пространство, вообще говоря, не является векторным полем на этой кривой. Почему?

Упражнение 6.2.6. Проверьте, что если мероморфная 1-форма на объемлющем пространстве является дифференциалом мероморфной функции на нем, то ее ограничение на кривую является дифференциалом ограничения функции на кривую.

Упражнение 6.2.7. Найдите порядки нулей и полюсов ограничения на кривую

$$x^n + y^n = 1$$

дифференциальных 1-форм а) xdx, б) xdy на плоскости.

Аналогично, голоморфное отображение $g : C_1 \to C_2$ комплексных кривых позволяет построить по мероморфной 1-форме ω на C_2 мероморфную

1-форму на C_1, которую мы будем обозначать $g^*\omega$. По определению, значение такой 1-формы на касательном векторе τ равно $\omega(dg(\tau))$, где $dg(\tau)$ — касательный вектор в C_2, образ вектора τ при касательном отображении dg. Это определение полностью совпадает с определением ограничения 1-формы на кривую в проективном пространстве, только вместо вложения в проективное пространство мы берем отображение в другую кривую.

Упражнение 6.2.8. Рассмотрим проекцию кривой $x^2+y^2=1$ на ось x. Верно ли, что любая мероморфная 1-форма на этой кривой является поднятием 1-формы с оси x при этом отображении?

Если же, как обычно, на кривой дискретно действует группа ее автоморфизмов, то любая мероморфная 1-форма на этой кривой, инвариантная относительно действия этой группы автоморфизмов, опускается до мероморфной 1-формы на факторкривой. То же, впрочем, справедливо и для векторных полей.

Пример 6.2.9. Рассмотрим на комплексной прямой $\mathbb{C}$ с координатой z дифференциальную 1-форму dz. Эта 1-форма инвариантна относительно сдвигов $z \mapsto z+z_0$ комплексной прямой, поэтому она опускается на любую эллиптическую кривую. Эта форма не имеет полюсов на $\mathbb{C}$, поэтому ее образ на любой эллиптической кривой является голоморфной 1-формой на ней. Тем самым мы построили на каждой эллиптической кривой по голоморфной 1-форме.

Упражнение 6.2.10. Докажите, что любая голоморфная 1-форма на эллиптической кривой пропорциональна построенной выше с постоянным коэффициентом пропорциональности. Это означает, что пространство голоморфных 1-форм на эллиптической кривой одномерно над $\mathbb{C}$.

У построенной выше голоморфной 1-формы на эллиптической кривой нет не только полюсов, у нее нет и ни одного нуля. Это означает, что *у любой мероморфной 1-формы на эллиптической кривой разность суммы порядков ее нулей и суммы порядков ее полюсов равна нулю.*

6.3 Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой

Проведенные выше вычисления показывают, что размерность пространства голоморфных 1-форм на $\mathbb{CP}^1$ равна нулю, а на эллиптической кривой она равна 1. Эти наблюдения позволяют заподозрить, что размерность этого пространства тесно связана с родом кривой. Сейчас мы приведем еще один чрезвычайно важный аргумент в пользу того, что эта размерность просто равна роду кривой. Мы докажем, что это утверждение справедливо для гладких плоских кривых. (Напомним, что не любая кривая может быть вложена в плоскость; в частности, вложимость кривой накладывает сильное ограничение на ее род.)

Теорема 6.3.1. *Размерность пространства голоморфных 1-форм на гладкой плоской кривой равна роду этой кривой.*

Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что размерность пространства голоморфных 1-форм не меньше рода кривой. Оценку в обратную сторону проведем в следующем разделе.

Пусть d — степень плоской кривой C. Как мы знаем, в этом случае ее род равен $g = (d-1)(d-2)/2$. Мы знаем, что кривые степени 1 и 2 рациональны, и для них утверждение теоремы справедливо. В дальнейшем будем предполагать, что $d \geq 3$. Рассмотрим в проективной плоскости прямую, пересекающую кривую C в d различных точках, и выберем систему координат $(x : y : z)$ таким образом, чтобы уравнением выбранной прямой было $z = 0$.

Рассмотрим теперь пространство S^{d-3} однородных многочленов степени $d-3$ от переменных x, y, z. Это — векторное пространство над полем комплексных чисел.

Упражнение 6.3.2. Докажите, что размерность этого пространства равна $(d-1)(d-2)/2$.

Мы построим по каждому такому многочлену голоморфную 1-форму на C, причем построенное отображение из S^{d-3} в пространство голоморфных 1-форм будет линейным и инъективным. Пусть кривая C задается однородным уравнением $F(x,y,z) = 0$ степени d, которое в карте $z = 1$ имеет вид $f(x,y) = 0$.

Сопоставим произвольному однородному многочлену $G(x,y,z)$ многочлен $g(x,y) = G(x,y,1)$ и дифференциальную 1-форму

$$\frac{gdx}{\partial f/\partial y}.$$

Эта 1-форма определена в тех точках плоскости, в которых частная производная многочлена f по y не обращается в нуль, и ее ограничение на C в этих точках является голоморфной 1-формой. Что происходит в тех точках, где $\partial f/\partial y = 0$? В силу того, что дифференциал многочлена f на кривой C равен нулю, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

мы заключаем, что

$$\frac{dx}{\partial f/\partial y} = -\frac{dy}{\partial f/\partial x}$$

на кривой. Тем самым, выписанная выше дифференциальная 1-форма на кривой может быть переписана в виде

$$-\frac{gdy}{\partial f/\partial x}.$$

Поскольку кривая C гладкая, обе частные производные по x и по y не могут обратиться в нуль в одной точке этой кривой, а значит, указанная 1-форма голоморфна на аффинной части кривой.

Проверим теперь, что если степень многочлена G равна $d-3$, то построенная 1-форма голоморфно продолжается в точки пересечения кривой C с прямой $z=0$. Перейдем от координат $(x:y:1)$ к координатам $(1:u:v)$, т.е. выполним замену

$$x = 1/v; \qquad y = u/v.$$

В координатах u, v наша 1-форма примет вид

$$-\frac{g(\frac{1}{v}, \frac{u}{v})\frac{dv}{v^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{v}, \frac{u}{v})},$$

или, после умножения числителя и знаменателя на v^{d-1},

$$-\frac{v^{d-3}g(\frac{1}{v}, \frac{u}{v})dv}{v^{d-1}\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{v}, \frac{u}{v})}.$$

Числитель последнего выражения есть многочлен, поскольку степень многочлена g равна $d-3$, а знаменатель есть не что иное как производная по u функции $F(1, u, v)$. Если она случайно равна 0, то мы можем перейти к производной по v, как мы это уже делали, заменяя y на x, если производная по y оказывалась равной нулю. Поэтому частное представляет собой отношение многочлена и функции, отличной от нуля в выбранной точке, а значит, не может иметь в ней полюса. Поэтому все 1-формы, которые строятся по многочленам степени $d-3$, голоморфны.

Отображение $g \mapsto \frac{gdx}{\partial f/\partial y}$, сопоставляющее многочлену 1-форму, является линейным отображением векторных пространств. Его ограничение на пространство многочленов степени $d-3$ инъективно, т.е. не имеет ядра. Действительно, многочлен при таком отображении переходит в нуль только в том случае, если он тождественно равен нулю на кривой C. Для многочленов степени $d-3$ это невозможно, поскольку степень кривой C есть $d > d-3$ и из гладкости кривой вытекает ее неприводимость. Поэтому на плоской кривой степени d есть по меньшей мере столько линейно независимых 1-форм, какова размерность пространства однородных многочленов степени $d-3$ от трех переменных.

Замечание 6.3.3. Выбор сопоставления многочлену 1-формы неслучаен. На самом деле, на проективной плоскости имеется выделенная 2-***форма*** ω, которая в карте $z=1$ имеет координатную запись $dx \wedge dy$. Сопоставим многочлену f 1-форму $\frac{\omega}{df}$. Проведенные выше рассуждения означают, что ограничение указанной 1-формы на кривую $f=0$ является корректно определенной голоморфной 1-формой. Такая 1-форма (и ее многомерные обобщения) называется ***формой Гельфанда–Лере***. Если степень многочлена g не превосходит $d-3$, то и 1-форма $g\omega/df$ является голоморфной 1-формой на кривой.

6.4 Интегрирование 1-форм

Нам осталось доказать, что размерность пространства голоморфных 1-форм не больше рода кривой. Принципиальным моментом здесь является возможность проинтегрировать 1-форму по вещественной кривой на поверхности. При этом мероморфную 1-форму можно рассматривать как 1-форму с комплексными значениями на вещественной двумерной поверхности,

$$a(z)dz = a(u+iv)(du+idv), \qquad z = u+iv.$$

Зафиксируем на кривой C точку x_0 и рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую $\gamma : [0,1] \to C$, $\gamma(0) = x_0$. Тогда для этой кривой определен интеграл

$$\int_\gamma \omega$$

от любой 1-формы ω. При этом, согласно формуле Стокса, интеграл зависит лишь от гомотопического класса кривой γ в пространстве кривых с фиксированными концами. Если мы будем немного менять конец $\gamma(1)$ кривой, не меняя ее гомотопического типа, то интеграл станет функцией от второго конца кривой.

Если 1-форма ω является точной, $\omega = df$ для некоторой функции f, то, по формуле Ньютона–Лейбница, ее интеграл по пути γ с началом в точке x_0 и концом в точке x_1 равен

$$\int_\gamma \omega = \int_{x_0}^{x_1} df = f(x_1) - f(x_0).$$

В частности, интеграл точной 1-формы по любому замкнутому (с общими началом и концом) пути равен нулю.

Рассмотрим теперь какой-нибудь набор замкнутых путей $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ с началом и концом в точке x_0, классы которых образуют базис в группе одномерных гомологий $H_1(C, \mathbf{Z})$.

Лемма 6.4.1. *Пусть ω — вещественная 1-форма на поверхности C. Если интегралы $\int_{\gamma_i} \omega$ 1-формы ω по всем циклам γ_i, $i = 1, \dots, 2g$, равны нулю, то форма ω точна, $\omega = df$. Здесь функция f определена однозначно с точностью до аддитивной константы. При этом если форма ω голоморфна, то и функция f голоморфна.*

Доказательство стандартно: мы строим по 1-форме ω функцию f по правилу

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \omega.$$

Этот интеграл не зависит от выбора пути, соединяющего точки x_0 и x из-за условия на интегралы по циклам. Лемма доказана.

Теперь мы знаем, что размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой не превосходит $2g$. Действительно, каждой такой 1-форме мы можем сопоставить набор ее интегралов по циклам γ_i. Если у двух голоморфных 1-форм все интегралы совпадают, то их разность имеет нулевые интегралы, а значит является дифференциалом голоморфной функции. Но поскольку на компактной кривой нет непостоянных голоморфных функций, эта разность равна нулю. Поэтому пространство голоморфных 1-форм не более, чем $2g$-мерно. Мы же хотим доказать, что оно не более, чем g-мерно.

Для этого наряду с голоморфными формами ω рассмотрим комплексно сопряженные с ними антиголоморфные формы $\bar{\omega}$. Мы хотим доказать, что если голоморфные 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_k$ линейно независимы, то классы когомологий 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_k, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_k$ линейно независимы. Отсюда будет следовать нужное нам неравенство.

Необходимое нам утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 6.4.2. *Если для пары голоморфных 1-форм ω_1, ω_2 на C сумма $\omega_1 + \bar{\omega}_2$ является дифференциалом гладкой функции f, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$.*

Доказательство. Пусть в локальной координате z на кривой $\omega_1 = g_1(z)dz$, $\omega_2 = g_2(z)dz$. Если $z = u + iv$ и $\bar{z} = u - iv$, то $dz \wedge d\bar{z} = -2i\, du \wedge dv$. Поэтому

$$\frac{i}{2}\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = |g_2(z)|^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = |g_2(z)|^2 du \wedge dv.$$

Предположим, что $\omega_2 \neq 0$. Тогда

$$\iint_C \frac{i}{2}\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \iint_C |g_2(z)|^2 du \wedge dv > 0.$$

С другой стороны,

$$\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \omega_2 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \omega_2 \wedge (\omega_1 + \bar{\omega}_2) = \omega_2 \wedge df,$$

поскольку $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Поэтому, чтобы прийти к противоречию, достаточно доказать, что $\iint_C \omega_2 \wedge df = 0$, чем мы сейчас и займемся.

Функция g_2 голоморфная, поэтому $\frac{\partial g_2}{\partial \bar{z}} = 0$, а значит,

$$d\omega_2 = d(g_2 dz) = dg_2 \wedge dz = \left(\frac{\partial g_2}{\partial z} dz + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) \wedge dz = 0.$$

Следовательно,

$$d(f\omega_2) = df \wedge \omega_2 + f\, d\omega_2 = df \wedge \omega_2.$$

Таким образом, форма $df \wedge \omega_2$ является точной, поэтому $\iint_C df \wedge \omega_2 = 0$. $\square$

6.5 Размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой с особыми точками

Для плоских кривых, которые имеют особые точки, но только самые простые (двойные точки, т.е. точки трансверсального самопересечения), теорема 6.3.1 остается верной, если мы определяем род кривой с особыми точками как род ее нормализации. Это означает, что размерность пространства голоморфных 1-форм равна g на любой гладкой кривой рода g.

Теорема 6.5.1. *Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой с двойными особыми точками равна роду этой кривой.*

Доказательство того, что размерность пространства голоморфных 1-форм не превосходит рода кривой, не требует никаких изменений. Доказательство того, что размерность пространства голоморфных 1-форм не меньше рода кривой, меняется следующим образом. Для кривой с двойными точками нужно рассмотреть не все пространство однородных многочленов степени $d-3$ от переменных x, y, z, а взять лишь те многочлены $G(x, y, z)$, которые обращаются в нуль во всех двойных точках кривой. Тогда 1-форма

$$\frac{g(x,y)\,dx}{\partial f/\partial y} = -\frac{g(x,y)\,dy}{\partial f/\partial x},$$

где $g(x,y) = G(x,y,1)$, не имеет полюсов в двойных точках кривой. Действительно, выберем локальные координаты так, чтобы в окрестности двойной точки кривая задавалась уравнением $f(x,y) = 0$, где $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots$, причем $b^2 - ac \neq 0$. Если отличная от начала координат точка (x, y) лежит на ветви, касающейся прямой $f_x = 0$, то $y \approx \frac{-ax}{b}$, поэтому $f_y(x,y) \approx 2bx + 2cy \approx 2\frac{b^2-ac}{b}x$. В таком случае у 1-формы $\frac{g(x,y)\,dx}{f_y}$ нет полюса в начале координат, поскольку $g(0,0) = 0$.

Размерность пространства многочленов, которые обращаются в нуль во всех двойных точках кривой, равна $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$. Как мы уже знаем (см. п. 3.2), это число равно роду нормализованной кривой.

6.6 Вычеты и интегралы от мероморфных 1-форм

Голоморфная 1-форма ω на комплексной кривой всегда замкнута, $d\omega = 0$. Поэтому интеграл от голоморфной 1-формы по стягиваемой кривой на комплексной кривой равен нулю. Для мероморфных 1-форм последнее утверждение уже неверно. Точнее говоря, оно становится верным, если областью определения мероморфной 1-формы считать комплексную кривую, из которой выколоты полюса этой формы. На такой поверхности маленькая окружность с центром в выколотой точке x_0 уже, как правило, нестягиваема (исключение составляет одна выколотая точка на рациональной кривой). Величина

$$\frac{1}{2\pi i}\int \omega = \mathrm{Res}_{x_0}\,\omega,$$

где интегрирование идет по такой окружности, проходимой в положительном направлении (“против часовой стрелки”), называется *вычетом* 1-формы ω в точке x_0. Если в окрестности точки x_0 введена локальная координата z, то 1-форма ω допускает локальное разложение

$$\omega = \left(a_{-k}z^{-k} + a_{-k+1}z^{-k+1} + \dots + a_{-1}z^{-1} + a_0 + \dots\right) dz,$$

и ее вычет совпадает с коэффициентом a_{-1} при z^{-1}.

Упражнение 6.6.1. Проверьте непосредственной заменой, что коэффициент при z^{-1} не зависит от выбора локальной координаты z.

Все вычеты точной мероморфной 1-формы нулевые.

Теорема 6.6.2. *Для мероморфной 1-формы ω на гладкой кривой выполняется равенство $\sum \mathrm{Res}_p(\omega) = 0$, где суммирование ведется по всем точкам, в которых вычет отличен от 0.*

Мы приведем два доказательства этой теоремы.

Доказательство. Действительно, склеим нашу поверхность из одного многоугольника таким образом, чтобы ни один из полюсов не попал на его границу. Тогда сумма вычетов 1-формы ω в ее полюсах равна, с точностью до коэффициента $1/2\pi i$, интегралу от этой 1-формы по циклу, обходящему многоугольник вдоль его границы в положительном направлении. Видно, что в поверхности, склеенной из этого многоугольника, этот цикл гомологичен нулю, поскольку он дважды — в противоположных направлениях — проходит по каждому из своих отрезков. $\square$

Доказательство. Рассмотрим область Ω, которая получается при вырезании из кривой C малых окрестностей полюсов формы ω. Форма ω голоморфна в области Ω, поэтому $\int_{\partial\Omega} \omega = 0$. С другой стороны, $\int_{\partial\Omega} \omega = -\sum \mathrm{Res}_p(\omega)$. $\square$

Теперь мы можем дать еще одно доказательство уже известного нам утверждения.

Теорема 6.6.3. *Сумма порядков нулей и полюсов любой мероморфной функции f на гладкой кривой равна 0.*

Доказательство. Применим теорему 6.6.2 к мероморфной 1-форме $\omega = \frac{df}{f}$. Если $f(z) = az^n + \dots$, где n — целое число и многоточие обозначает члены старших порядков, в окрестности точки $p \in C$, то в окрестности этой точки $\omega = \frac{df}{f} = n\frac{dz}{z}$. Следовательно, вычет формы ω в точке p равен n. Таким образом, сумма порядков нулей и полюсов любой мероморфной функции f равна сумме вычетов 1-формы ω, поэтому она равна 0. $\square$