

# Математические основы естествознания

## Листок 5. Взаимодействие скалярного и калибровочного полей.

### Задачи для письменного домашнего решения

Обязательные задачи: 1а, 1б, 2а, 2б.

1. Рассмотрим плотность лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu\bar{\varphi}\nabla^\mu\varphi - m^2|\varphi|^2$$

для комплексного скалярного поля  $\varphi$ , взаимодействующего с абелевым калибровочным полем  $A_\mu$ , где  $\nabla_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ ,  $\bar{\nabla}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  – ковариантные производные.

- а) Вывести уравнения движения.
- б) Есть ли в теории сохраняющиеся токи? Если есть, найти их.
- в) Записать лагранжиан в “полярных координатах”  $\rho, \theta$  для поля  $\varphi$  (т.е. сделать замену  $\varphi = \rho e^{i\theta}$ ) и вывести уравнения движения в новых переменных.

2. Рассмотрим теорию векторного поля  $A_\mu$ , взаимодействующего со скалярным комплексным полем  $\varphi$  в пространстве-времени размерности  $2+1$  с сигнатурой  $(+1, -1, -1)$ . Действие имеет вид

$$S = \kappa \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \int d^3x \bar{\nabla}_\mu\bar{\varphi}\nabla^\mu\varphi$$

где  $\nabla_\mu, \bar{\nabla}_\mu$  те же, что и в предыдущей задаче, а  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} = \pm 1$  – полностью антисимметричный тензор (примем, что  $\varepsilon^{012} = 1$ ). (Действие для поля  $A_\mu$  такого вида называется действием Черна-Саймонса.)

- а) Инвариантно ли действие относительно калибровочных преобразований полей?
- б) Вывести уравнения движения.
- в) Можно ли найти общее решение уравнений движения? Если да, найти его.
- г) Есть ли в теории сохраняющиеся токи? Если да, найти их, выписать соответствующие законы сохранения и обсудить их смысл.
- д) Как изменятся ответы на предыдущие вопросы, если на поле  $\varphi$  наложить связь  $|\varphi|^2 = 1$ ?