Логика и алгоритмы 2011. Задание 9.

Машины Тьюринга и вычислимость.

125. Построить машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:

    (a) $f(x) = xx$ (копирование слова x);

    (b) Сумма битов слова x по модулю 3 (результат в унарной записи);

    (c) Слово x, записанное в обратном порядке.

126. Построить машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции натуральных аргументов (в унарной записи):

    (a) $f(x, y) = x + y$;

    (b) $f(x) = [x/2]$;

    (c) $f(x, y) = 1$, если $x \leq y$, и $f(x, y) = 0$, иначе.

127. Докажите, что композиция вычислимых функций вычислима (опишите построение соответствующей машины Тьюринга).

В решении следующих задач можно опираться на тезис Чёрча–Тьюринга, то есть пользоваться интуитивным представлением об алгоритмах.

128. Докажите, что следующие функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислимы:

    (a) $f(m, n) = \text{НОД}(m, n)$;

    (b) $f(n) = [\sqrt{n}]$;

    (c) $f(n) =$ *n-й знак после запятой в десятичной записи числа e*;

    (d) $f(n) =$ *минимальное простое $p > n$.*

129. Пусть T — множество все простых чисел p для которых $p + 2$ также простое. Является ли множество T (а) перечислимым и (б) разрешимым? (Про конечность этого множества мы не спрашиваем.)

130. (a) Если $A, B \subset \mathbb{N}$ разрешимы, то $A \cup B$, $A \cap B$, $\mathbb{N} \setminus A$ также разрешимы. (b) Если $A, B \subset \mathbb{N}$ перечислимы, то таковы $A \cap B$, $A \cup B$.

131. Всякое бесконечное перечислимое множество $A \subset \mathbb{N}$ имеет вычислимый пересчёт без повторений, то есть существует тотальная вычислимая инъекция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ для которой $\text{rng}(f) = A$.

132. Непустое множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда A имеет монотонный пересчёт, то есть когда $A = \operatorname{rng}(f)$ для некоторой тотальной вычислимой функции f такой, что $f(n) \leq f(n+1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

133. Всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

134. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима тогда и только тогда, когда график f — перечислимое подмножество $\mathbb{N}^2$.

135. Докажите, что (а) образ и (б) прообраз перечислимого множества под действием вычислимой функции перечислим.

136. Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами от переменных $x_1, \ldots, x_n, y$. Докажите, что множество $\{m \in \mathbb{N} \mid P(x_1, \ldots, x_n, m) = 0 \textit{ имеет решение в } \mathbb{Z}\}$ перечислимо.

137. (a) Множество всех тавтологий разрешимо. (b) Множество всех общезначимых формул логики предикатов перечислимо. (*Указание:* воспользуйтесь теоремой Гёделя о полноте.)