Листок 6

Поля Якоби.

1. Поля Якоби вдоль отрезка геодезической на римановом многообразии M^n образуют линейное пространство, размерность которого равна $2n$. Доказать.

2. Как выглядят поля Якоби на

   а) евклидовой плоскости

   б) плоскости Лобачевского?

3. Доказать, что если J – поле Якоби вдоль геодезической $\gamma(t)$, то $\nabla_{\dot\gamma}(J, \dot\gamma)$ =const. (Следовательно, для геодезической вариации с закрепленными концами $J \perp \dot\gamma$)

4. Привести пример, показывающий, что бывают несопряженные точки, соединенные бесконечным числом геодезических. А можно ли встретить где-нибудь сопряженные точки, соединенные единственной геодезической?

5. Пусть $w, v, \ \ w \perp v \in T_m M$. Доказать, что поле Якоби геодезической вариации $\gamma(t, s) = \exp(t(v + sw))$ на M удовлетворяет начальным условиям:

$$J(0) = 0, \quad (\nabla_{\dot\gamma} J)(0) = w.$$

6. Из задачи 5 вывести, что размерность полей Якоби, удовлетворяющих условию $J(m) = J(\exp v) = 0$, равна $\dim \operatorname{Ker}(d \exp)_v$.

Вокруг теоремы Картана-Адамара.

7. Привести пример локальной изометрии, которая не является накрытием.

8. Пусть $f : X \to Y$ локальная изометрия римановых многообразий, причем X – полное. Тогда для любой геодезической (кратчайшей) $\gamma : [0, 1] \to Y$ и любой точки $x_0 \in f^{-1}(\gamma(0))$ существует единственная геодезическая (кратчайшая) $\tilde\gamma : [0, 1] \to X$, удовлетворяющая условию $\tilde\gamma(0) = x_0$ и $f(\tilde\gamma) = \gamma(t)$. Доказать этот факт, подражая построению подъема пути в теории накрытий.

9. Вывести из задачи 8 следующее полезное утверждение: пусть $f : X \to Y$ локальная изометрия римановых многообразий, причем X – полное. Тогда f – накрытие (Указание: можно воспользоваться существованием у каждой точки Y окрестности в виде «прекрасного» шара).

Дискретные действия.

10. Пусть группа Γ действует на локально-компактном топологическом пространстве X. Это действие называется дискретным, если каждая точка $x \in X$ обладает такой окрестностью U, что $\gamma(U) \cap U = \varnothing$ для всех таких $\gamma \in \Gamma$, что $\gamma x \neq x$.

    Действие $\Gamma : X$ называется свободным, если $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma x = x\} = \langle 1 \rangle$ для всех $x \in X$.

    Доказать, что если группа Γ действует на X свободно и дискретно, то проекция $X \to X/\Gamma$ является регулярным накрытием (накрытие Галуа). Группа преобразований скольжения этого накрытия совпадает с группой Γ (вспомнить определения из топологии).

11. (Спуск метрики.) Пусть $\Gamma : X$ – группа изометрий риманова многообразия X, действующая дискретно и свободно. Тогда X/Γ можно снабдить такой единственной римановой метрикой, что $X \to X/\Gamma$ – локальная изометрия. Доказать.

12. (Подъем метрики.) Пусть $f : X \to Y$ – накрытие Галуа риманового многообразия Y (т. е. $Y = X/\Gamma$). Поднимем риманову метрику с Y на X с помощью отображения f. Доказать, что при этом f становится локальной изометрией римановых многообразий, а группа Γ действует на X изометриями по отношению к поднятой метрике.

13. Доказать теорему Картана-Адамара (Указание: делай раз, делай два, делай три, ...)