6 Уравнение Якоби

Работаем на полных связных римановых многообразиях. Мотор.

• На прошлой лекции мы доказали, следуя Хопфу-Ринову, что на геодезически полном связном многообразии (M, g) любые две точки можно соединить кратчайшей, которая непременно является отрезком геодезической. Но если геодезическая слишком длинна, то она, вообще говоря, уже не реализует расстояние между своими точками. Хорошо известный пример – замкнутые геодезические на сфере.

• • Существует глубокая связь между существованием неминимальных геодезических через точку $m \in M$ и особенностями отображения $\exp_m : T_m M \to M$, которое на геодезически полном римановом многообразии M (а значит и на полном метрическом пространтсве (M, g)) определено всюду.

• • • Немного прояснить суть здесь происходящего помогут поля Якоби.

Поля Якоби.

Определение 2 *Полем Якоби называется поле геодезической вариации геодезической $\gamma(t)$.*

Это означает, что геодезическая $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, варьируется в таком семействе кривых $\gamma(s,t)$, $0 \le t \le 1$, $-\epsilon \le s \le \epsilon$, $\gamma(0,t) = \gamma(t)$, где каждая кривая $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$ является геодезической. Как обычно, поле вариации $V(t) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)\,|_{s=0}$. По традиции для поля Якоби используют обозначение $J(t)$ ($T = T_s(t)$ по-прежнему обозначает поле скоростей вдоль геодезической)

Лемма 3 *а) Поле Якоби удовлетворяет дифференциальному уравнению Якоби*

$$\nabla_T^2 J + R(T, J)T = 0 \qquad (1)$$

б) Уравнение Якоби – это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Пространство его решений 2 dim M -мерно. Каждое решение определяется начальными значениями: парой векторов $J(0), (\nabla_T J)(0)$.

в) верно и обратное утверждение: любое поле Якоби $J(t)$ на геодезической $\gamma(t)$ является полем скоростей некоторой ее геодезической вариации.

Доказательство. а) Имеем

$$\nabla_T^2(J) = \nabla_T(\nabla_T J) = \nabla_T(\nabla_J T) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Так как}[T, J] = 0, \text{то} \\ R(T,J)T = \nabla_J \nabla_T T - \nabla_T \nabla_J T = \\ = -\nabla_T \nabla_J T, \text{ поскольку } \nabla_T T = 0 \end{array} \right| = -R(T,J)T$$

$$\text{или} \quad \nabla_T^2(J) + R(T,J)T = 0.$$

б) Чтобы дотронуться до этого уравнения, воспользуемся методом подвижного репера – полезной идеей Эли Картана.

Введем вдоль геодезической $\gamma(t)$ ортонормированные параллельные базисы $e_i(t)$ (это значит, что 1) $\{e_i(t)\}$ – ортонормированный базис в $T_{\gamma(t)}M$ при любом $0 \le t \le 1$; 2) векторное поле $e_i(t)$ параллельно вдоль кривой $\gamma(t)$ $(\nabla_T e_i = 0)$ для всех $i = 1, \dots, n$). Тогда $J = \sum (J, e_i)e_i$, и векторное уравнение (1) записывается в виде линейной системы скалярных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(J, e_i)'' + \sum_{m=1}^{n} (R(T, e_m)T, e_k)(J, e_m) = 0, \qquad k = 1, \dots, n$$

(проверьте!)

Таким образом, утверждение б) основывается на теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы обыкновенных Д.У.

Пример 1. Предположим, что M – полное связное риманово многообразие постоянной секционной кривизны $\sec = K$.

В этом случае,

$$(R(T, e_m)T, e_k) = K \begin{vmatrix} (T,T) & (T,e_k) \\ (e_m,T) & (e_m,e_k) \end{vmatrix} = K\left\{(T,T)(e_m,e_k) - (T,e_k)(T,e_m)\right\} \ \text{(почему ?)}$$

(Указание: полезно понимать тензор кривизны как оператор $R : \Lambda^2 TM \to \Lambda^2 TM$)

Или

$$(J, e_k) + K \sum_{m=1}^{n} \left\{(T,T)(e_m,e_k) - (T,e_k)(T,e_m)\right\}(J, e_m) = 0$$

Предположим, что $((J,T) = 0$ (поле Якоби перпендикулярно полю скоростей) и $(T,T) = 1$ (натурально параметризованная геодезическая). Тогда наша система распадается, принимая простой вид:

$$(J, e_k) + K(J, e_k) = 0 \qquad k = 1, \dots, n$$

Из явного вида решений следует в этом случае, что

Обращаться в нуль в двух точках решение может только при $K > 0$, и нули следуют с шагом $\pi/\sqrt{K}$.

в) Предположим, что на геодезической $\gamma(t)$ от $\gamma(0)$ до $\gamma(1)$ задано якобиево векторное поле $J(t)$. Построим геодезическую вариацию, порождающую поле J.

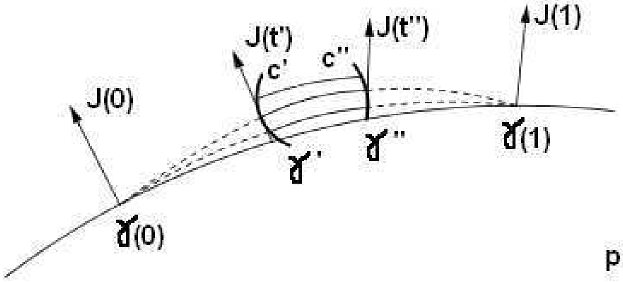

рис. 1

С этой целью рассмотрим пару точек γ' и γ'' на геодезической $\gamma(t)$, которые расположены внутри достаточно малого шара B^0, любые две точки которого можно соединить единственной геодезической (доказательство существования такого шара намечено в задачах 5 листка). Далее, строим две кривые $c'(s)$ и $c''(s)$, стартующие в точках γ' и γ'' с начальными скоростями $J(t')$ и $J(t'')$ соответственно. Нужное семейство геодезических мы получим, соединив геодезическими точки $c'(s)$ и $c''(s)$ (жирные линии на рис. 1) (напомним, что такая геодезическая единственна!), а затем продолжив (смотри пунктиры на рис. 1) построенные геодезические за пределы шала B^0 (в этом месте используется геодезическая полнота M). Остается заметить, что якобиево поле, будучи решением линейного дифференциального уравнения второго порядка, однозначно определяется не только значениями $J(t)$ и $(\nabla_T J)(t)$, но и своими значениями в достаточно близких точках γ' и γ'' (смотри, например, В.И. Арнольд «Обыкновенные дифференциальные уравнения»).

Замечание. Попутно показано, что существуют якобиевы поля вдоль геодезической с любыми наперед заданными значениями в двух близких точках геодезической.

Сопряженные точки и особенности отображения exp.

Определение 3 *Две точки m' и m'' ($m' \neq m''$) называются* ***сопряженными*** *вдоль геодезической γ, если на этой геодезической существует ненулевое векторное поле Якоби J, равное нулю в точках m' и m''.*

Кратностью *сопряженных точек точек m' и m'', $m', m'' \in \gamma$, называется размерность линейного пространства всех таких полей Якоби.*

Пример 2. Вычисления, проделанные в примере 1, показывают, что в пространстве постоянной отрицательной кривизны сопряженные точки отсутствуют. Верно более сильное утверждение: сопряженные точки отсутствуют и на многообразиях с секционной кривизной $\sec \leq 0$ (не обязательно постоянной!).

Рассмотрим отображение $\exp_m : T_m M \to M$ в какой-нибудь точке $m \in M$. Геодезическая полнота означает, что это отображение определено на всем касательном пространстве $T_m M$. Предположим, что $\exp_m$ вырождается в точке $v \in T_m M$. Тогда верно следующее:

Лемма 4 *Точки* $m = \exp(0)$ *и* $\exp v$ *сопряжены вдоль геодезической* $\exp tv$.

Доказательство.

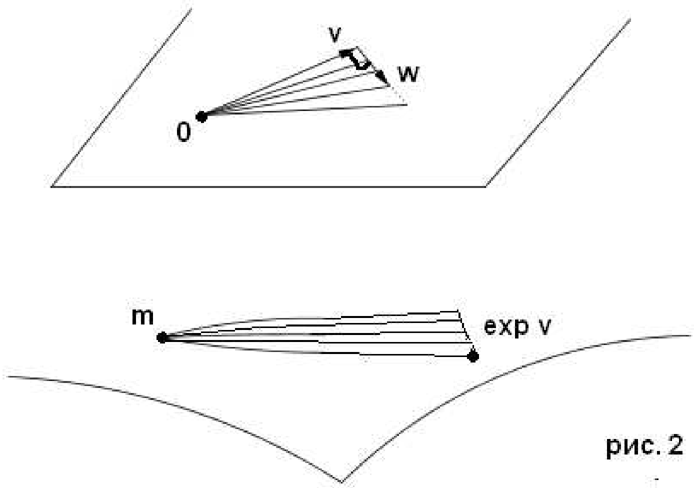

рис. 2

Дано, что дифференциал $(d\exp)_v$ в точке v обладает нетривиальным ядром. Поскольку отображение exp сохраняет длины в радиальном направлении, то ядро оператора $(d\exp)_v$ лежит в ортогональном дополнении $v^{\perp}$ к вектору v (почему?). Пусть w – ненулевой вектор из ядра. Тогда семейство геодезических $\exp(t(v + sw))$ (см. рис. 2) рождает поле Якоби, сопрягающее точки $\exp(0)$ и $\exp v$ вдоль $\gamma_0(t) = \exp tv$ (проверьте это!). ■

Следствие. Отсутствие сопряженных точек означает невырожденность отображения exp.

Верно и обратное утверждение, которое предлагается в качестве несложного самостоятельного упражнения.

Задача. Пусть точки $\exp(0)$ и $\exp v$ сопряжены вдоль геодезической $\exp tv$. Тогда дифференциал $(d\exp)_v$ вырожден в точке $v \in T_{\exp(0)}M$.

Теорема Картана-Адамара.

Оставим на недолго теорию уравнения Якоби (теорию сопряженных точек) и обратимся к одному яркому приложению всего уже сказанного.

Теорема 4 *(Адамар* $(n = 2)$ *- Картан (произвольное* n*))*
Пусть M *полное связное риманово многообразие неположительной кривизны* $\sec \leq 0$. *Тогда для любой точки* $m \in M$ *отображение* $\exp_m : T_mM \to M$ *является накрытием.*

Следствие. Односвязное, связное, полное риманово многообразие M^n неположительной кривизны диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Доказательство этой теоремы проводится по следующей схеме:

1. На M^n отсутствуют сопряженные точки

$$\Downarrow$$

2. $\exp_m$ – это всюду невырожденное отображение $T_mM \to M$

$$\Downarrow$$

3. Всюду невырожденное отображение $\exp_m : T_mM \to M$ индуцирует на T_mM новую метрику («пересадка» метрики с M!), причем $\exp_m$ автоматически является локальной изометрией.

$$\Downarrow$$

4. Новая метрика на T_mM является полной по теореме Хопфа : T_mM служат геодезическими проходящими через точку m и в этой новой метрике (почему?).

Верен следующий приятный факт, состоящий в том, что локальная изометрия $\varphi : M_1 \to M_2$ полных римановых многообразий является накрытием.

Что касается доказательств, то я сделаю первый шаг и намечу последний.

Утверждение 1. На полном связном римановом многообразии неположительной кривизны отсутствуют сопряженные точки.

Доказательство. Если это не так, то существует ненулевое поле Якоби J вдоль геодезической $\gamma(t)$, равное нулю в двух различных точках на геодезической. Посмотрим, как меняется квадрат длины (J, J) поля Якоби вдоль геодезической. Последовательно получаем:

$$\nabla_T(J, J) = 2(\nabla_T J, M)$$

$$\nabla_T^2(J, J) = 2(\nabla_T J, \nabla_J J) + 2(\nabla_T^2 J, J) = 2\left\{-(R(T, J)T, J) + (\nabla_T J, \nabla_T J)\right\}$$

Следовательно, вторая производная функции (J, J) по t неотрицательна, если кривизна $\sec_M \leq 0$. Таким образом, $f(T) = (J, J)$ – выпуклая неотрицательная, отличная от нуля функция. Но такая функция не может иметь двух нулей. Противоречие. ∎

Утверждение 5. Пусть $\varphi : M_1 \to M_2$ – отображение полных римановых многообразий, которое является локальной изометрией. Тогда φ накрытие.

Набросок доказательства. Пусть $m_2 \in M_2$ и $m_1 \in \varphi^{-1}(m_2)$. Прежде всего, нужно заметить, что условие локальной изометрии влечет перестановочность отображений φ и exp, то есть коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} T_{m_1}M_1 \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d, "\exp_{M_1}"] & T_{m_2}M_2 \arrow[d, "\exp_{M_2}"] \\ M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Далее, пусть $B^0(m_2, r)$ – великолепный шар для $\exp_{m_2}$. Покажем, что $U = B^0(m_2, r/2)$ есть правильная окрестность накрытия φ, то есть прообраз $\varphi^{-1}(U)$ есть дизъюнктное объединение связных компонент U_i и $\varphi : U_i \to U$ – диффеоморфизм. Пусть U_{m_1} – связная компонента прообраза, содержащая точку m_1, а x и y – различные точки из U_{m_1}, которые отображение φ «склеивает»: $\varphi(x) = \varphi(y)$.

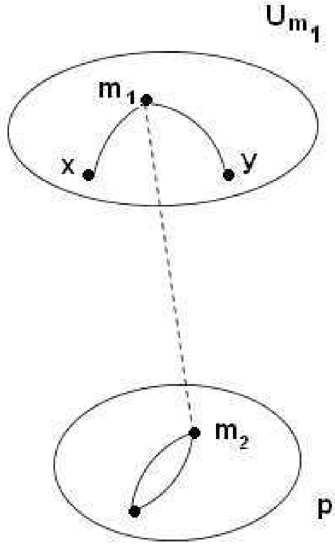

рис. 3

Соединим x и y с точкой m_1 кратчайшими γ_x и γ_y. Кратчайшие целиком лежат в U_{m_1} (почему?). Но тогда точки $\varphi(x) = \varphi(y)$ и m_2 в великолепном шаре будут либо соединены двумя разными геодезическими, либо геодезической с «петелькой», чего в шаре $U = B^0(m_2, r/2)$ не бывает. Следовательно, $\varphi : U_{m_1} \to U = B^0(m_2, r/2)$ – диффеоморфизм. Остается решить следующую задачу.

Задача. Доказать, что $U_n \cap U_{n'} = \varnothing$, для различных связных компонент прообраза $\varphi^{-1}(B^0(m_2, r/2))$.

Некоторые топологические следствия теоремы Адамара-Картана.

• Так как касательное пространство $T_m M$ односвязно, то $\exp_m : T_m M \to M$ – универсальное накрытие. Следовательно, $\pi_i(M) = 0$, $i \geq 2$, то есть M –асферическое пространство типа $K(\pi, 1)$, где $\pi = \pi_1(M)$. Таким образом, гомотопический тип M полностью контролируется его фундаментальной группой $\pi_1(M)$.

В частности, $H^i(M, \mathbb{Z})$ $H_i(M, \mathbb{Z}) = H^i(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ ($= \mathbb{Z}$ - когомологии абстрактной группы $\pi_1(M)$).

Отметим также, что $M \cong \mathbb{R}^n/\Gamma$, где $\Gamma \cong \pi_1(M)$ – группа накрытия, действующая в $\mathbb{R}^n$ (с новой метрикой!) как дискретная группа изометрий.

• • Если M – многообразие постоянной неотрицательной кривизны, то $T_m M$ изометрично евклидову пространству или пространству Лобачевского.