

5. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Клеточное пространство это хаусдорфово топологическое пространство X со следующей дополнительной структурой: имеется разбиение $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigsqcup_{\alpha \in I_k} e_{\alpha}^k$ на подмножества e_{α}^k , называемые клетками, для каждой клетки имеется непрерывное отображение замкнутого k -мерного шара $\gamma_{\alpha}^k : D^k \rightarrow \overline{e_{\alpha}^k}$ (характеристическое отображение клетки e_{α}^k ; черта сверху означает замыкание) такое, что $\gamma_{\alpha}^k|_{\text{Int}(D^k)} : \text{Int}(D^k) \rightarrow e_{\alpha}^k$ — гомеоморфизм на e_{α}^k . При этом разбиение обладает следующими двумя свойствами:

- (C) Граница $\partial e_{\alpha}^k \stackrel{\text{def}}{=} \overline{e_{\alpha}^k} \setminus e_{\alpha}^k$ содержится в объединении конечного множества клеток e_{β}^i с $i < k$ (т.е. меньшей размерности).
- (W) Множество $F \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с замыканием любой клетки.

Множества индексов I_k для некоторых k могут быть пустыми, т.е. не обязательно существуют клетки всех размерностей.

n -мерный остов $\text{sk}_n X$ — объединение всех клеток размерности не выше n . Непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ двух клеточных пространств называется *клеточным*, если $f(\text{sk}_n X) \subset \text{sk}_n Y$. Теорема о клеточной аппроксимации: любое непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ клеточных пространств гомотопно клеточному. Относительный вариант теоремы: если эта гомотопия уже задана на клеточном подпространстве в пространстве X , то ее можно продолжить до гомотопии на всем X .

Ограничение характеристического отображения $\gamma_{\alpha}^k : D^k \rightarrow X$ на границу диска D^k представляет собой отображение (уже не обязательно гомеоморфизм!) $S^{k-1} \rightarrow X$, а по аксиоме (C) — отображение $f_{\alpha}^k : S^{k-1} \rightarrow \text{sk}_{k-1}(X)$. Для каждой клетки e_{β}^{k-1} рассмотрим отображение $u_{\beta}^{k-1} : \text{sk}_{k-1}(X) \rightarrow S^{k-1}$, получающееся стягиванием в точку всех клеток $\text{sk}_{k-1}(X)$ (всех размерностей), кроме самой e_{β}^{k-1} . Степень композиции $u_{\beta}^{k-1} \circ f_{\alpha}^k : S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ называется *коэффициентом инцидентности* клеток e_{α}^k и e_{β}^{k-1} и обозначается $[e_{\alpha}^k : e_{\beta}^{k-1}]$.

Клеточный комплекс клеточного пространства имеет вид $\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$, где C_k — абелева группа, свободно порожденная множеством k -мерных клеток e_{α}^k , $\alpha \in I_k$, а дифференциал ∂_k задается формулой $\partial_k(e_{\alpha}^k) = \sum_{\beta \in I_{k-1}} [e_{\alpha}^k : e_{\beta}^{k-1}] e_{\beta}^{k-1}$. Гомологии клеточного комплекса равны сингулярным гомологиям пространства. Аналогично определяется клеточный комплекс с коэффициентами в кольце A (кольцо ассоциативное, коммутативное и с единицей): пространство C_k — свободный A -модуль, порожденный множеством k -мерных клеток e_{α}^k , $\alpha \in I_k$; дифференциал определяется той же формулой. (\mathbb{Z} -модуль — абелева группа; модуль над полем — векторное пространство.)

- Задача 1.** а) Докажите, что клеточное пространство X связно \Leftrightarrow линейно связно $\Leftrightarrow \text{sk}_1 X$ линейно связен. б) Докажите, что клеточное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно состоит из конечного числа клеток.

В следующей задаче нужно построить клеточное разбиение пространства X , вычислить коэффициенты инцидентности клеток и гомологии с коэффициентами в \mathbb{Z} и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если даны два пространства X и Y и отображение $f : X \rightarrow Y$, то нужно подобрать клеточные разбиения так, чтобы отображение f было клеточным и вычислить гомоморфизм $f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ при всех k .

Задача 2. а) X — тор $(S^1 \times S^1)$; б) X — сфера с g ручками; в) X — бутылка Клейна; г) X — проективная плоскость; д) X — бутылка Клейна с g ручками; е) X — проективная плоскость с g ручками; ж) X — сфера с g ручками и n дырками; Y — сфера с g ручками, $f : X \rightarrow Y$ — вложение. з) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $Y = S^1$, $f : X \rightarrow S^1$ — проекция $f(v) = v/|v|$. и) $X = S^n$, $Y = \mathbb{R}P^n$, $f : X \rightarrow Y$ — стандартное двулистное накрытие. к) $X = S^3$, $Y = S^2$, $f : X \rightarrow Y$ — расслоение Хопфа. л*) $X = S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$, $Y = \mathbb{C}P^n$, $f : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ — обобщенное расслоение Хопфа ($f(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n]$). м*) $X = S^{2n+1}$ как в пункте 2л; на X действует группа $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{e^{2\pi im/k} \mid m = 0, \dots, k-1\}$ умножением каждого z_s на соответствующее число $e^{2\pi im/k}$ (число одно и то же для всех $s = 0, \dots, n$). Y — пространство орбит этого действия, $f : X \rightarrow Y$ — отображение, переводящее произвольную точку в ее орбиту. н*) $X = S^{\infty}$ — множество бесконечных последовательностей (x_1, \dots, x_n, \dots) , члены которых равны нулю, начиная с некоторого номера (своего для каждой последовательности), и $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 1$. $Y = \mathbb{C}P^{\infty}$ (дайте определение!), $f : S^{\infty} \rightarrow \mathbb{C}P^{\infty}$ — аналог расслоения Хопфа. Топология в S^{∞} определяется так: имеется каноническое вложение $\iota_n : S^n \rightarrow S^{\infty}$, заданное формулой $\iota_n(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Множество $F \subset S^{\infty}$ называется замкнутым, если $\iota_n^{-1}(F) \subset S^n$ замкнуто при любом n .

Рассмотрим линейное пространство \mathbb{R}^n с фиксированным базисом e_1, \dots, e_n . Для произвольного подпространства $V \subset \mathbb{R}^n$ размерности k обозначим $a_s(V) = \dim V \cap \langle e_1, \dots, e_s \rangle$.

Задача 3*. Докажите, что $a_1(V) \leq a_2(V) \leq \dots \leq a_n(V) = k$ и $1 - a_1(V) \leq 2 - a_2(V) \leq \dots \leq n - a_n(V) = n - k$.

Задача 4*. а) Назовем индекс s *ведущим*, если $a_s(V) > a_{s-1}(V)$. Докажите, что в подпространстве V существует единственный базис v_1, \dots, v_k такой, что $v_i = e_{m_i} + f_i$, где m_i — i -й по величине ведущий индекс, а $f_i = \sum_t \alpha_t^{(i)} e_t$, где в сумме все индексы t меньше m_i и среди них нет ведущих. б) Докажите, что множество $D(b_1, \dots, b_n)$ подпространств $V \subset \mathbb{R}^n$ таких, что $a_i(V) = b_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, гомеоморфно \mathbb{R}^m , и найдите m . Опишите явно эти множества в случаях $k = 1$ ($\mathbb{R}P^{n-1}$) и $k = 2, n = 4$ ($G(4, 2)$).

Задача 5*. Докажите, что при $k = 1$ множества $D(a_1, \dots, a_n)$ образуют клеточное разбиение $\mathbb{R}P^{n-1}$. а) Вычислите гомологии $\mathbb{R}P^{n-1}$ с коэффициентами в \mathbb{Z} и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. б) Аналогичные вопросы про случай $k = 2, n = 4$.

На самом деле множества $D(a_1, \dots, a_n)$ при любых n и k образуют клеточное разбиение грассманиана $\mathbb{R}G(n, k)$ — множества k -мерных подпространств в \mathbb{R}^n , но доказательство этого факта довольно длинное.