Семинар по спецфункциям. Листок 2

1. а) Докажите, что
$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m-1} x \sin^{n-1} x \, dx = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(\frac{m+n}{2})}, \qquad \operatorname{Re} m > 0,\ \operatorname{Re} n > 0,$$

   б) Выразите интеграл $\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q dx$, где $p, q > -1$, через значения Г-функции.

   в) Вычислите интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$, где $m > 0$.

   г) Вычислите интеграл $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}$, где $a, b, n > 0$.

   д) Вычислите $I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx, \quad n \in \mathbb{R}, n \geq 0$ через значения Г-функции. Докажите, что $I(2n+1) = 0$ при и $I(2n) = \frac{(2n+1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ для целых положительных $n = 0, 1, 2....$

2. Пусть $a_1, \ldots, a_k$, $b_1 \ldots, b_l$ не являются целыми неположительными числами. Докажите, что бесконечное произведение
$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1+n)\cdots(a_k+n)}{(b_1+n)\cdots(b_l+n)}$$
сходится тогда и только тогда, когда оно уравновешенно, т.е., $k = l$ и $a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_l$, и равно в этом случае отношению $\dfrac{\Gamma(b_1)\cdots\Gamma(b_l)}{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_k)}$.

3. а) Докажите, что функция $G(z) = 2^z\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2})$ удовлетворяет функциональному уравнению $G(z+1) = zG(z)$

   б)* Докажите (воспользовавшись, например, любой из известных Вам конструкций $\Gamma(z)$) формулу удвоения
$$2^z\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(z).$$

4. а) Вычислите интеграл
$$\int_0^1 x_1^{\alpha_1-1}dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{\alpha_2-1}dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}} x_n^{\alpha_n-1}dx_n.$$

   б) Пусть $p_1, ..., p_n$ - положительные числа .Вычислите объем тела, заключенного между поверхностями $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, $\sum_{i=1}^n (x_i/a_i)^{p_i} \leq 1$.

   в)* Вычислите интеграл
$$\iint_S x_1^{\alpha_1-1} \cdot x_n^{\alpha_n-1} dx_1 \cdots dx_n$$
   где S - множество $x_i \geq 0$, $\sum x_i = 1$.

5.* Докажите, что интеграл Дирихле
$$\iint f(t_1+t_2+\cdots+t_n) t_1^{\alpha_1-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1} dt_1\cdots dt_n, \quad \operatorname{Re}\alpha_j > 0$$
взятый по симплексу $0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_n \leq 1,\ t_1 + \cdots t_n \leq 1$, равен
$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)} \int_0^1 f(\tau)\tau^{\alpha_1+\cdots\alpha_n-1}d\tau.$$

6.* Используя тождество $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty t^{m-1}e^{-xt}dt$, найдите интеграл
$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^m}dx. \qquad (0 < m < 1)$$