"Спецфункции". Тезисы 5-ой лекции.

1. ζ-функция Римана $\zeta(s)$ определяется при $\mathrm{Re}\, s > 0$ как сумма абсолютно сходящегося ряда

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Следующее замечание:

$$\int_0^{\infty} e^{-nt} t^s \frac{dt}{t} = n^{-s} \int_0^{\infty} e^{-nt} (nt)^s \frac{d(nt)}{nt} = n^{-s}\Gamma(s)$$

немедленно приводит к интегральному представлению

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt = \int_0^{\infty} \sum_{n\geq 1} e^{-nt} t^{s-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt, \quad \mathrm{Re}\, s > 1.$$

Внесение знака суммы под интеграл допустимо, поскольку при $\mathrm{Re}\, s > 1$ ряд из подинтегральных функций равномерно на всей полуоси $(0, \infty)$ сходится к своему пределу. Таким образом, при $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt.$$

Подинтегральное выражение представляет собой преобразование Меллина

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} \varphi(t) t^{s-1} dt$$

функции $\varphi(t) = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t-1}$. Эта функция экспоненциально убывает при $t \to +\infty$ и ведет себя как t^{-1} в окрестности начала координат, так что разность $\varphi(t) - t^{-1}$ есть $O(1)$, т.е., ограничена в окрестности $(0, \varepsilon)$ точки 0. Более того, воспользовавшись одним из определений чисел Бернулли,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \qquad |t| < 2\pi,$$

получаем сходящееся в окрестности $t = 0$ разложение

$$\varphi(t) - t^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad \text{где} \qquad a_n = \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}. \tag{1}$$

Преобразование Меллина функции $\varphi(t)$, быстро убывающих на бесконечности и имеющих в нуле асимптотическое разложение, может быть продолжено аналитически в левую полуплоскость преобразованиями подинтегрального выражения.

А именно, пусть $\varphi(t)$, $t \in (0, \infty)$ - непрерывная функция, убывающая при $t \to +\infty$ быстрее некоторой экспоненты, $|\varphi(t)| < e^{-ct}$ для некоторого $c > 0$ при всех $t > T$. Пусть числа a_i, $i = m, m+1, \ldots$ таковы, что для любого $n \geq m$ величина $\varphi(t) - \sum_{i=m}^{n} a_i t^i$ есть $O(t^{n+1})$, т.е., отношение $(\varphi(t) - \sum_{i=m}^{n} a_i t^i)/t^{n+1}$ ограничено в некоторой окрестности $(0, \varepsilon)$ точки $t = 0$ (иными словами, ряд $\sum_{i=m}^{+\infty} a_i t^i$ является асимптотическим разложением функции

$\varphi(t)$ в нуле). Тогда преобразование Меллина, определяемое как аналитическое продолжение интеграла

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt$$

есть мероморфная функция с простыми полюсами в точках $s = -n$, где $n \geq m$; вычет $\tilde{\varphi}(s)$ в полюсе $s = -n$ равен a_n.

В самом деле, из условия $|\varphi(t) - a_m t^m| < C|t|^{m+1}$ в окрестности нуля следует, что интеграл $\int_0^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt$ абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\, s > -m$ и, значит, определяет в этой области мероморфную функцию $\tilde{\varphi}(s)$. Разобъем интеграл на два:

$$\int_0^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt = \int_0^1 \varphi(t) t^{s-1} dt + \int_1^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt.$$

Второй интеграл сходится при любых s; первый при $\mathrm{Re}\, s > -m$ преобразуем как

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(t) t^{s-1} dt &= \int_0^1 (\varphi(t) - a_m t^m) t^{s-1} dt + a_m \int_0^1 t^{m+s-1} dt \\ &= \int_0^1 (\varphi(t) - a_m t^m) t^{s-1} dt + a_m \left. \frac{t^{m+s}}{m+s} \right|_0^1 = \int_0^1 (\varphi(t) - a_m t^m) t^{s-1} dt + \frac{a_m}{m+s}.\end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^1 (\varphi(t) - a_m t^m) t^{s-1} dt$ сходится уже в области $\mathrm{Re}\, s > -m-1$ и, значит, формула

$$\tilde{\varphi}(s) = \frac{a_m}{m+s} + \int_0^1 (\varphi(t) - a_m t^m) t^{s-1} dt + \int_1^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt$$

определяет аналитическое продолжение преобразования Меллина $\tilde{\varphi}(s)$ в область $\mathrm{Re}\, s > -m-1$. Считая теперь, что $\mathrm{Re}\, s > -m-1$, преобразуем первый интеграл к виду

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\varphi(t) - a_m t^m) t^{s-1} dt &= \int_0^1 (\varphi(t) - a_m t^m - a_{m+1} t^{m+1}) t^{s-1} dt + a_{m+1} \left. \frac{t^{m+s+1}}{m+s+1} \right|_0^1 \\ &= \int_0^1 (\varphi(t) - a_m t^m - a_{m+1} t^{m+1}) t^{s-1} dt + \frac{a_{m+1}}{m+s+1}\end{aligned}$$

и продолжим, таким образом, $\tilde{\varphi}(s)$ в область $\mathrm{Re}\, s > -m-2$, и т.д..

Вспоминая теперь разложение (1), заключаем, что аналитическое продолжение интеграла $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt$ есть мероморфная функция с полюсами в точках $s = 1, 0, -1, -2, \ldots$. Вычет в точке $s = 1$ равен 1, вычет в точке $s = -n$ равен $\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}$. С другой стороны, $\Gamma(s)$ нигде не обращается в ноль и имеет простые полюсы в точках $s = -n$, $n = 0, -1, -2\ldots$ с вычетами $\frac{(-1)^n}{n!}$, так что в отношении $\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt$ все полюса, кроме $s = 1$, в котором остается простой полюс с вычетом 1, сокращаются. Попутно приведенное вычисление дает значение $\zeta(-n)$, равное отношению вычетов интеграла и $\Gamma(s)$:

$$\zeta(-n) = \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} : \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1}.$$

В частности, $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ и $\zeta(-2n) = 0$ при $n = 1, \ldots$ в силу свойств чисел Бернулли.

2. Аналитическое продолжение ряда $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ можно осуществить и другими средствами. Например, при $\operatorname{Re} s > 1$ сумму $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ можно записать как интеграл Стильтьеса $\zeta(s) = 1 + \int_1^{\infty} \frac{d[t]}{t^s}$, где $[t]$ - целая часть вещественного числа t и применить к нему формулу интегрирования по частям:

$$\zeta(s) = 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} d[t] = 1 + \frac{[t]}{t^s}\bigg|_1^{\infty} + s\int_1^{\infty} \frac{[t]}{t^{s+1}} dt = s\int_1^{\infty} \frac{[t]}{t^{s+1}} dt.$$

Последний интеграл представляет из себя обычный интеграл Римана. Прибавим и вычтем из него $s\int_1^{\infty} t^{-s} dt = s/(s-1)$:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s\int_1^{\infty} \frac{[t]-t}{t^{s+1}} dt = 1 + \frac{1}{s-1} + s\int_1^{\infty} \frac{[t]-t}{t^{s+1}} dt. \tag{2}$$

Поскольку $[t] - t$ - ограниченная функция, последний интеграл сходится (при $t \to \infty$) в области $\operatorname{Re} s > 0$, так что приведенная выше формула определяет аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в эту область. Раскрывая смысл интеграла Стильтьеса, эту выкладку можно переписать в элементарных терминах:

$$\begin{aligned}\zeta(s) =& 1 + \frac{1}{2^s} + ... = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) + 2\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + 3\left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + ... = \\ & s\int_1^2 \frac{dx}{x^{s+1}} + 2s\int_2^3 \frac{dx}{x^{s+1}} + ... = s\int_1^{\infty} \frac{[t]}{t^{s+1}} dt = 1 + \frac{1}{s-1} + s\int_1^{\infty} \frac{[t]-t}{t^{s+1}} dt.\end{aligned}$$

Устремляя в формуле (2) s к единице, можно вычислить следующий порядок разложений $\zeta(s)$ в окрестности единицы:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \frac{[t]-t}{t^2} dt + O(s-1).$$

Интеграл в этой формуле вычисляется явно на каждом отрезке от n до $n+1$, так что

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{[t]-t}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) - \log\frac{n+1}{n} = \\ \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1} - \log(n+1)\right) = \gamma - 1,\end{aligned}$$

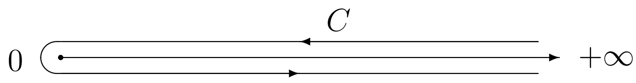
где γ -постоянная Эйлера. Таким образом,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1).$$

3. Еще один способ аналитического продолжения $\zeta(s)$ доставляет интеграл Ханкеля. Повторяя буквально аргументы, приведенные в предыдущей лекции, получаем:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \frac{-1}{2i\sin\pi s} \oint_C (-t)^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt, \tag{3}$$

где контур C обходит действительную полуось $[0, +\infty)$ против часовой стрелки:



Интеграл $\oint_C (-t)^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$ определен (сходится на бесконечности) при всяком s, так что формула (3) определяет аналитическое продолжение $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость.

Пусть теперь $\mathrm{Re}\, s < 0$. Для вычисления интеграла $\oint_C (-t)^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$ замкнем контур C, добавив к нему окружность $D : |s| = R$ большого радиуса. Подинтегральное выражение можно представить как произведение двух функций, $f(t) = (-t)^{s-1}$ и $g(t) = \frac{1}{e^t - 1}$. Функция $g(t)$ является композицией двух функций. Первая осуществяет экспонециальное отображение $t \to x = e^t$, вторая - дробно-линейное отображение $x \to w = \frac{1}{x-1}$.

Последнее дробно-линейное отображение отображает внешность малой окрестности 1 $|x - 1| > \varepsilon$ в ограниченную область размера порядка ε. С другой стороны, прообраз внутренности окрестности $|x - 1| < \varepsilon$ при экспоненциальном отображении $t \to x = e^t$ состоит из счетного объединения окрестностей точек $t = 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$, каждая из которых имеет размер порядка ε.

Таким образом, если окружность D находится от всех точек $t = 2\pi i n$ на расстоянии, большего заданного положительного числа, то значение функции $g(t) = \frac{1}{e^t-1}$ на ней ограничено фиксированным числом K. Тогда интеграл $\oint_D (-t)^{s-1} \frac{1}{e^t-1} dt$ можно оценить как

$$\left| \oint_D (-t)^{s-1} \frac{1}{e^t - 1} dt \right| < K \left| \oint_D |t^{s-1}| |dt| \right| = 2\pi K R^{\mathrm{Re}\, s},$$

что стремится к нулю при $R \to \infty$, поскольку $\mathrm{Re}\, s < 0$. Таким образом, интеграл $\oint_C (-t)^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$ можно вычислить суммированием вычетов.

Особыми точками подинтегрального выражения являются точки $t = 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$. Точка 0 лежит вне контура. В окрестности точки $t = 2\pi i n$ знаменатель $e^t - 1$ ведет себя как $(t - 2\pi i n)$ так что

$$\mathrm{Res}_{t=2\pi i n} (-t)^{s-1} \frac{1}{e^t - 1} dt = (-2\pi i n)^{s-1}.$$

Поскольку замкнутый контур обходит область по направлению часовой стрелки, интеграл равен сумме вычетов с коэффициентом $-2\pi i$, так что

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \frac{-2\pi i}{-2i \sin \pi s} \sum_{n \neq 0} (-2\pi i n)^{s-1} = \frac{2^{s-1}\pi^s}{\sin \pi s} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^{1-s}} \left(i^{s-1} + (-i)^{s-1} \right) =$$

$$\frac{2^{s-1}\pi^s}{\sin \pi s} \zeta(1-s) \left(e^{\frac{(s-1)\pi i}{2}} + e^{\frac{-(s-1)\pi i}{2}} \right) = \frac{2^s \pi^s}{\sin \pi s} \zeta(1-s) \cos \frac{\pi(s-1)}{2} = \frac{2^{s-1}\pi^s}{\cos \pi \frac{s}{2}} \zeta(1-s).$$

Это и есть функциональное соотношение Римана, доказанное при условии $\mathrm{Re}\, s < 0$ и верное всюду в силу аналитичности обеих частей соотношения.